

Theoretische Physik B SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 1
20.04.2010

Zwei-Körper Problem: Geladene Teilchen

Als kleine Erinnerung an das Kepler-Problem betrachten wir zwei Teilchen, die aufgrund des Coulombschen Gesetzes miteinander wechselwirken. Das Coulombsche Potential ist ähnlich dem Gravitationspotential umgekehrt proportional zum Abstand zwischen den Teilchen. Es gibt jedoch einen wichtigen Unterschied. Während die Gravitationskraft stets anziehend ist, kann die elektrische Kraft sowohl anziehend als auch abstoßend sein. In letzterem Fall ist die Bewegung unendlich, die Bahnkurve ist eine Hyperbel.

Jedes Teilchen übt auf das andere eine Kraft aus, die nur vom Betrag des Abstandes $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = r$ abhängt. Dann gilt folgende Newtonsche Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Der Gesamtimpuls ist eine erhaltene Größe (wir setzen voraus, dass es keine äußeren Kräfte gibt)

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = M \ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{P}} = 0.$$

Die Bewegung des Schwerpunktes ist dann trivial. Die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung lautet

$$\ddot{\mathbf{r}} \equiv \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{1}{\mu} f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2)$$

mit

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Die Bewegungsgleichung (2) ähnelt einer physikalischen Situation, in der sich das Kraftzentrum unbeweglich im Ursprung befindet und ein Teilchen mit der Masse μ sich unter dem Einfluss dessen Kraft bewegt. Diese Bewegung wird von zwei Erhaltungsgrößen eingeschränkt: der Energie und dem Drehimpuls.

Der Drehimpuls der Relativbewegung ist gegeben durch

$$\mathbf{L}_{rel} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (3)$$

Wir betrachten nun die Zeitableitung von $\mathbf{L}_{rel}$:

$$\dot{\mathbf{L}}_{rel} = \mu [\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}].$$

Der erste Teil ist trivial: $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$. Im zweiten Teil benutzen wir Gl. (2):

$$\mu \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -f(r) \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r} = 0.$$

Man sieht, dass für Zentralkraftfelder mit festem Ursprung [d.h. von der Form Gl. (2)] der Drehimpuls stets erhalten ist.

Da $\mathbf{L}_{rel}$ senkrecht auf $\mathbf{r}$ und $\dot{\mathbf{r}}$ steht, verläuft die Relativbewegung in einer Ebene senkrecht zu $\mathbf{L}_{rel}$. Wählt man die z -Richtung in Richtung von $\mathbf{L}_{rel}$, so liegt $\mathbf{r}$, ebenso wie $\dot{\mathbf{r}}$, immer in der xy -Ebene. Führt man nun in der xy -Ebene Polarkoordinaten ein, dann erhält man

$$\mathbf{L}_{rel} = (0, 0, l_z), \quad l_z = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mu r^2 \dot{\varphi}. \quad (4)$$

Die Energie läßt sich zerlegen in einen Anteil der Schwerpunktbewegung und in einen Anteil der Relativbewegung. Für die kinetische Energie erhält man

$$T = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} = \frac{M \dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\mathbf{r}}^2}{2}.$$

Zusammen mit der potentiellen Energie ergibt sich

$$E_{rel} = \frac{\mu \dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (5)$$

Hier bezeichnen q_1 und q_2 die elektrischen Ladungen der Teilchen. Im Kepler-Problem ist die potentielle Energie durch $-\gamma m_1 m_2 / r$ (γ ist dabei die Gravitationskonstante) gegeben. Die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ schreibt man in Polarkoordinaten als

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Für die Energie der Relativbewegung erhält man folglich [wir benutzen Gl. (4)]

$$E_{rel} = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{l_z^2}{2\mu r^2} + \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (6)$$

Da der Drehimpuls l_z eine erhaltene Größe ist, ist die Energie E_{rel} unabhängig von φ . Der Ausdruck für E_{rel} hat genau dieselbe Form wie derjenige für die Energie eines eindimensionalen Systems mit dem effektiven Potential

$$U_{eff}(r) = \frac{l_z^2}{2\mu r^2} + \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (7)$$

Betrachten wir jetzt die Eigenschaften des Potentials $U_{eff}(r)$. Die folgende Fälle sind interessant:

(i) $q_1 q_2 < 0$ (dieser Fall entspricht qualitativ dem Kepler-Problem). Die Coulombsche Kraft ist anziehend. Das Potential $U_{eff}(r)$ hat dann die in Abb. 1 dargestellte Form. Wenn nun $E_{rel} < 0$ gilt (in Abb. 1 als gestrichelte Linie dargestellt), dann ist die Bewegung beschränkt. Für r gilt

$$r_{min} \leq r \leq r_{max}.$$

Die Bahnkurve ist eine Ellipse. Das ist das Ergebnis des Kepler-Problems.

(ii) Wenn $E_{rel} > 0$ gilt, dann ist die Bewegung unendlich. Im Fall des abstoßenden Coulombschen Potentials $q_1 q_2 > 0$ ist dies die einzige Möglichkeit (siehe Abb. 2). Die Bahnkurve ist eine Hyperbel.

Um die Bahnkurve nun explizit zu berechnen, benutzen wir Gl. (6):

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E_{rel} - U_{eff}(r))}.$$

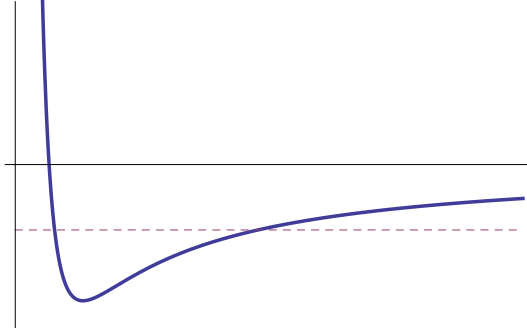


Abbildung 1: Effektives Potential $U_{eff}(r)$ einer attraktiven Wechselwirkung $q_1 q_2 < 0$.

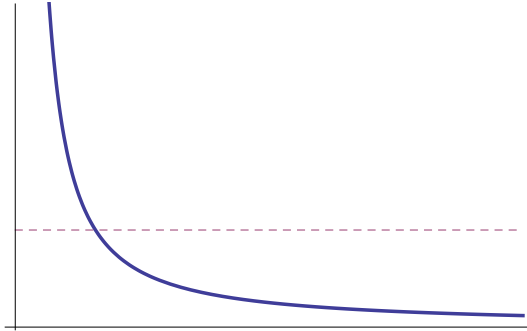


Abbildung 2: Effektives Potential $U_{eff}(r)$ einer repulsiven Wechselwirkung $q_1 q_2 > 0$.

Wegen Gl. (4) erhält man

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{l_z}{\mu r^2}.$$

Somit gilt

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{\sqrt{2\mu}}{l_z} r^2 \sqrt{E_{rel} - U_{eff}(r)},$$

und es ergibt sich

$$\varphi = \pm \frac{l_z}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E_{rel} - U_{eff}(r)}} + const. \quad (8)$$

Für das Coulombsche Potential Gl. (7) kann man das Integral nach Standardregeln berechnen.

Im Fall des anziehendes Potential wurde die Bahnkurve schon berechnet. Das Ergebnis ist

$$\frac{p}{r} = 1 + \epsilon \cos \varphi, \quad (9)$$

mit

$$p = \frac{l_z^2}{\mu q_1 q_2}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_{rel} l_z^2}{\mu q_1^2 q_2^2}}. \quad (10)$$

Man erhält so die Polargleichung für einen Kegelschnitt mit einem Brennpunkt im Zentrum und zwar

- (i) für $\epsilon < 1$ (d.h. $E_{rel} < 0$) eine Ellipse mit dem Spezialfall eines Kreises für den minimalen Wert $\epsilon = 0$;

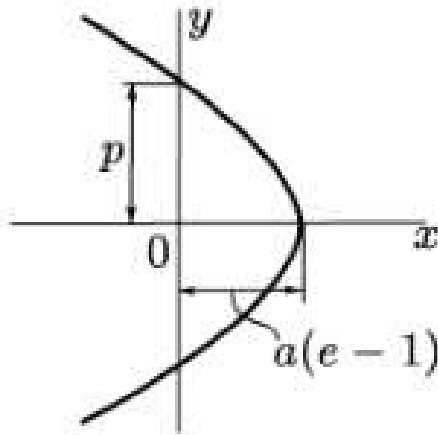


Abbildung 3: Hyperbolische Trajektorie im Falle eines attraktiven Potentials. Hier ist $a = |q_1 q_2|/2E_{rel}$ und p ist durch Gl. (10) und $e = \epsilon$.

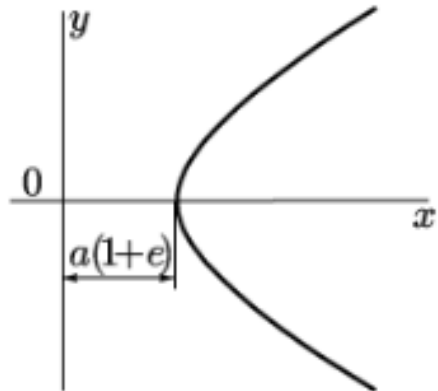


Abbildung 4: Hyperbolische Trajektoie im Falle eines repulsiven Potentials. Hier ist $a = |q_1 q_2|/2E_{rel}$ und $e = \epsilon$.

(ii) für $\epsilon = 1$ (d.h. $E_{rel} = 0$) eine Parabel;

(iii) für $\epsilon > 1$ (d.h. $E_{rel} > 0$) eine Hyperbel. In diesem Fall sieht die Bahnkurve wie in Abb. 3 aus.

Im Fall des abstoßendes Potential sind nur positive Energien möglich (Abb. 2), die Bahnkurve ist eine Hyperbel (Abb. 4). Nun ist jedoch $p < 0$ und es gilt

$$|p|/r = -1 + \epsilon \cos \varphi. \quad (11)$$

Wir wollen nun Gleichung (9) in kartesischen Koordinaten betrachten. Mit den Beziehungen

$$x = r \cos \varphi, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

folgt

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2p\epsilon x + \epsilon^2 x^2.$$

Dies führt letztendlich auf folgende Gleichung

$$(1 - \epsilon^2) x^2 + 2p\epsilon x + y^2 = p^2. \quad (12)$$

(*) Für $\epsilon = 1$ (d.h. $E_{rel} = 0$) ist die Bahnkurve eine Parabel:

$$2p\epsilon x + y^2 = p^2.$$

(**) Für $\epsilon \neq 1$ gilt

$$(1 - \epsilon^2) (x - x_0)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1 - \epsilon^2},$$

mit

$$x_0 = \frac{p\epsilon}{1 - \epsilon^2}.$$

Jetzt kann man die Gleichung in die kanonische Form überführen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \alpha \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (13)$$

mit

$$a^2 = \frac{p^2}{(1 - \epsilon^2)^2}, \quad b^2 = \frac{p^2}{|1 - \epsilon^2|}, \quad \alpha = \text{sign}(1 - \epsilon^2). \quad (14)$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Bahnkurve für $\epsilon < 1$ (d.h. $\alpha > 0$) eine Ellipse ist:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Anderenfalls, für $\epsilon > 1$ (d.h. $\alpha < 0$) ist die Bahnkurve eine Hyperbel

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung wird auch durch Gl. (11) beschrieben.

Wenn das Teilchen sehr weit vom Umsprung entfernt ist, so folgt die Bahnkurve der Asymptoten

$$x - x_0 = \pm \frac{a}{b} y. \quad (15)$$

Man erkennt jetzt den Winkel ϑ zwischen den Asymptoten durch

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{b}{a} = |1 - \epsilon^2|. \quad (16)$$