Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Theoretische Physik B - Lösungen SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 2
20.04.2010

---

1. Pendel mit bewegter Aufhängung (6 Punkte)

(a) Die Zwangsbedingung lautet

$$F(\vec{r},t) = (\vec{r}-\vec{r}_s)^2 - l^2 = (x - x_s(t))^2 + z^2 - l^2 = 0$$

Für die Zwangskraft gilt dann

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} F = \lambda[2(x-x_s)\vec{e}_x + 2z\vec{e}_z]$$

Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_z + \vec{Z} \tag{1}$$

In kartesischen Koordinaten ergibt das

$$m\ddot{x} = 2\lambda(x - x_s(t))$$
$$m\ddot{z} = -mg + 2\lambda z$$

Jetzt benutzen wir Zylinder-Koordinaten:

$$x - x_s(t) = l\sin\theta$$

$$z = -l\cos\theta$$

und differenzieren zweimal. Das ergibt

$$\ddot{x} = \ddot{x}_s(t) + l(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2)$$
$$\ddot{z} = l(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2)$$

Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten jetzt

$$m\ddot{x} = m\ddot{x}_s(t) + ml(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2) = 2\lambda l\sin\theta \tag{2}$$
$$m\ddot{z} = ml(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2) = -mg - 2\lambda l\cos\theta \tag{3}$$

(b) Wir multiplizieren Gl. (2) mit $\cos\theta$ und Gl. (3) mit $\sin\theta$. Dann addieren wir die Gleichungen. Dies eliminiert λ und ergibt

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta - \cos\theta\ddot{x}_s(t)$$

Wir betrachten kleine Auslenkungen θ, so dass $\sin\theta \approx \theta$ und $\cos\theta \approx 1$. Dann gilt

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = -\frac{\ddot{x}_s(t)}{l}$$

wobei $\omega_0^2 \equiv g/l$. Für das Beispiel $x_s = x_0\cos\omega t$ gilt dann

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{x_0}{l}\omega^2\cos\omega t$$

Wir machen einen Ansatz $\theta(t) = a\cos\omega t$. Das ergibt

$$a = \left(\frac{x_0}{l}\right)\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Also

$$\theta(t) = \left(\frac{x_0}{l}\right)\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t \tag{4}$$

(c) Die Zwangskraft könnte man jetzt aus Gl. (1) bestimmen:

$$\vec{Z} = m\ddot{\vec{r}} + mg\vec{e}_z$$

und $\vec{r} = [(x_s(t) + l\sin\theta)\vec{e}_x - l\cos\theta\vec{e}_z]$. Stattdessen können wir einfach λ bestimmen, da $\vec{Z} = 2\lambda(\vec{r} - \vec{r}_s)$ und $|\vec{Z}| = 2l|\lambda|$.
Aus Gl. (3) leiten wir

$$\lambda = -\frac{m}{2l\cos\theta}\left[l(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2) + g\right]$$

her. Für kleine Auslenkungen ergibt das

$$\lambda \approx -\frac{m}{2l}\left(\frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{2} + \ldots}\right)\left[g + l\theta\ddot{\theta} + l\dot{\theta}^2\right] \approx -\frac{m}{2l}\left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right)\left[g + l\theta\ddot{\theta} + l\dot{\theta}^2\right]$$

und

$$\lambda \approx -\frac{m}{2l}\left(g + g\frac{\theta^2}{2} + l\theta\ddot{\theta} + l\dot{\theta}^2\right)$$

(Wir vernachlässigen Potenzen höher als 2 in θ). Dann ist

$$\lambda \approx -\frac{mg}{2l}\left(1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{\omega_0^2}\theta\ddot{\theta} + \frac{1}{\omega_0^2}\dot{\theta}^2\right)$$

Jezt setzen wir Gl. (4) ein. Dann

$$\lambda = -\frac{mg}{2l}\left[1 + \left(\frac{x_0^2}{l^2}\right)\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\cos^2\omega t - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos 2\omega t\right)\right]$$

Da $\theta \ll 1 \to (x_0/l) \ll 1$ ist λ negativ. Dann

$$|\vec{Z}| = mg\left[1 + \left(\frac{x_0^2}{l^2}\right)\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\cos^2\omega t - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos 2\omega t\right)\right]$$

Es ist klar, dass $\vec{Z}$ zur Aufhängung gerichtet ist ($\lambda < 0$).

2. Atwoodsche Fallmaschine (6 Punkte)

(a) Die Zwangsbedingung lautet $F(z_1, z_2) = z_1 + z_2 + (L - \pi R) = 0$. Beachten Sie, dass z_1 und z_2 negativ sind und die Aufgabe nur sinnvoll ist, wenn $L > \pi R$.

(b) Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten:

$$m_1\ddot{z}_1 = -m_1 g + \lambda \frac{\partial F(z_1, z_2)}{\partial z_1} = -m_1 g + \lambda \tag{5}$$

$$m_2\ddot{z}_2 = -m_2 g + \lambda \frac{\partial F(z_1, z_2)}{\partial z_2} = -m_2 g + \lambda \tag{6}$$

$$F(z_1, z_2) = 0 \tag{7}$$

Von Gl. (7) folgt $\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0$. Wir finden $\ddot{z}_1$ und $\ddot{z}_2$ aus Gl. (5) und (6). Dann

$$\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = -g + \frac{\lambda}{m_1} - g + \frac{\lambda}{m_2} = 0$$

Das ergibt

$$\lambda = \frac{2gm_1m_2}{m_1 + m_2}$$

Wir setzen dies in die Gl. (5) ein und bekommen

$$(m_1 + m_2)\ddot{z}_1 = -(m_1 - m_2)g$$

Durch Intergieren bekommen wir die Lösung:

$$z_1(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g\, t^2 + c_1 t + c_0$$
$$z_2(t) = -(L - \pi R) - z_1(t)\,,$$

und die Konstanten c_1 und c_0 werden durch die Randbedingungen bestimmt, d.h.

$$c_1 = 0 \qquad \text{und} \quad c_0 = -\frac{1}{2}\,(L - \pi R)$$

(c) Die Zwangskräfte auf die beiden Massen sind gleich, $\vec{Z}_1 = \vec{Z}_2 = \lambda\vec{e}_z = \frac{2gm_1m_2}{m_1+m_2}\,\vec{e}_z$. Die Achse der Welle muß dann die Kraft $\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2$ aufnehmen. Für $m_1 = m_2 = m$ ist $\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 = 2m\vec{g}$ gleich dem Gewicht der beiden Massen. Für $m_1 \neq m_2$ ist die Kraft kleiner als $(m_1 + m_2)\vec{g}$. Das folgt aus $4m_1m_2 < (m_1 + m_2)^2$. Das bedeutet, dass ein Teil der Gewichtskräfte zur Beschleunigung der Massen dient.

3. Das hängende Seil (8 Punkte)

(a) Wir betrachten ein kleines Teil des Seils (Fig. (1)). Da das Teil sich nicht bewegt, ist die Summe aller Kräfte null. $T(x)$ ist die Spannungskraft die entlang des Seils gerichtet ist. Die Projektionen auf $\vec{e}_x$ und auf $\vec{e}_z$ ergeben

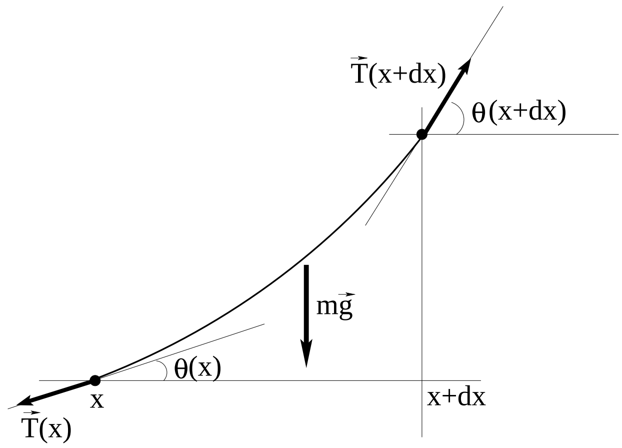

Abbildung 1: Ein kleines Teil des Seiles.

$$T(x)\cos\theta(x) = T(x+dx)\cos\theta(x+dx)\ , \tag{8}$$

$$T(x+dx)\sin\theta(x+dx) - T(x)\sin\theta(x) = \rho g dl = \rho g dx/\cos\theta(x) \tag{9}$$

wobei ρdl die Masse des Teils, dl die Länge des Teils, und ρ die Dichte des Seiles sind.

Von Gl. (8) folgt, dass $T(x)\cos\theta(x) = C$ und C ist eine Konstante. Dann setzen wir $T(x) = C/cos\theta(x)$ in die Gl. (9) ein. Das ergibt

$$\frac{d}{dx}\tan\theta = \frac{D}{\cos\theta}$$

und $D = \rho g/C$. Wir führen jetzt $g(x) = \tan\theta$ ein. Dann gilt

$$\frac{d}{dx}g = D\sqrt{1+g^2}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist einfach (man kann z.B. Separation der Variablen anwenden).

$$g(x) = \sinh(Dx+c)$$

c ist eine Konstante.

Wir beobachten, dass $\tan\theta = dz/dx$. Integration ergibt

$$z(x) = \frac{\cosh(Dx+c)}{D} + h$$

wobei h eine weitere Konstante ist.

(b) Die Wahl der Koordinatensystems und die Randbedingungen ergeben:

$$c = 0 \qquad \text{und} \qquad h = -\frac{\cosh(Dl/2)}{D}$$

Die Konstante D kann durch die Länge des Seils und die Abstand zwischen A und B bestimmt werden. Wir können immer den Ursprung der Koordinaten so wählen, dass $c = 0$. Jetzt berechnen wir die Länge des Seils durch

$$\frac{L}{2} = \int\limits_0^{l/2} \frac{dx}{\cos\theta}$$

Wir haben

$$\frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{1+g^2} = \cosh(Dx)$$

Das ergibt

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{D}\sinh\left(\frac{Dl}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{L}{2}D = \sinh\left(\frac{Dl}{2}\right) \tag{10}$$

Diese Gleichung gibt den Parameter D als Funktion von l und L. Hier geht nun ein, dass $L > l$ sein muss: Vergleicht man die Ableitungen der beiden Funktionen von Gl. 10 (Funktionen von D!) an der Stelle $D = 0$, so muss gelten

$$\frac{L}{2} \geq \frac{l}{2}$$

damit es eine Lösung $D > 0$ gibt.