

Theoretische Physik B SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 3
27.04.2010

1. Doppel-Pendel

(6 Punkte)

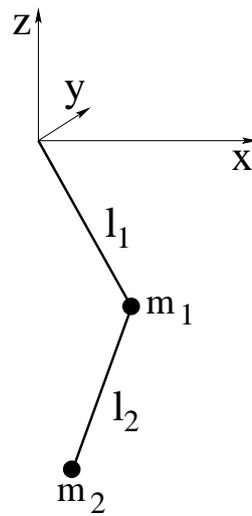


Abbildung 1: Das Doppel-Pendel.

Betrachten Sie ein Doppel-Pendel (Abb. 1). Die Massen der Massenpunkte sind m_1 und m_2 , die Länge der Seile sind l_1 und l_2 . Beide Massenpunkte bewegen sich in 3 Dimensionen. Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen erster Art in kartesischen Koordinaten auf. (Die Lösung ist nicht verlangt.)

2. Massenpunkt auf einer Kugel

(8 Punkte)

Ein Massenpunkt (Masse m) gleitet reibungslos auf einer Kugel (Radius R) (siehe Abb. 2). Wir benutzen ein Koordinatensystem mit Ursprung im Mittelpunkt der großen Kugel, und nehmen an, dass der Massenpunkt in der x - z Ebene hinabgleitet. Die Position des Massenpunkts werde durch den Vektor $\vec{r}(t)$ gegeben, $\theta(t)$ sei dessen Winkel zur

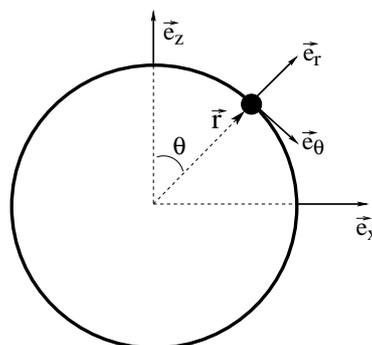


Abbildung 2: Massenpunkt auf einer Kugel.

\vec{e}_z -Richtung. Die Anfangsgeschwindigkeit des Massenpunktes sei null, und der Anfangswinkel θ_0 sei klein, aber ungleich Null. Finden Sie mittels der Lagrange-Gleichungen erster Art den Winkel θ_c , bei dem der Massenpunkt die Kugel verlässt.

- Finden Sie die Zwangsbedingung, die gilt, solange der Massenpunkt auf der Kugel gleitet. Schreiben Sie Lagrange-Gleichungen erster Art. In welche Richtung wirkt die Zwangskraft. (3 Punkte)
- Schreiben Sie die Lagrange-Gleichungen in Kugel-Koordinaten (mit $\phi = 0$) um. Drücken Sie durch die Zwangsbedingung und durch Integrieren einer der Gleichungen den Winkel θ als Funktion der Zwangskraft und des Anfangswinkels θ_0 aus. (3 Punkte)
- Formulieren Sie die Bedingung, bei der der Massenpunkt die Kugel verlässt. (Hinweis: wie groß ist die Zwangskraft im Moment des Verlassens.) Finden Sie θ_c . (2 Punkte)

3. Perle auf einer rotierenden Stange

(6 Punkte)

Eine Perle der Masse m gleitet reibungsfrei auf einer Stange, welche mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert (siehe Abb. 3).

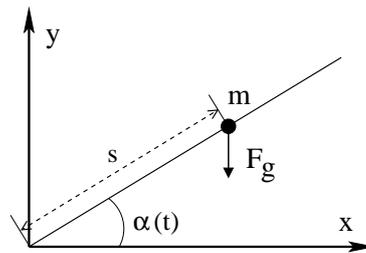


Abbildung 3: Perle auf einer rotierenden Stange mit $\alpha(t) = \omega t$.

- Vernachlässigen sie zunächst die Gravitationskraft \vec{F}_g . Bestimmen sie die Zwangsbedingung $g(x, y, t)$. Geben sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art zuerst in kartesischen Koordinaten an und führen sie dann geeignete Koordinaten ein, um eine Gleichung für $s(t)$ (Abstand der Perle zum Ursprung) zu erhalten. Interpretieren sie diese Gleichung (Hinweis: Zentrifugalkraft). Geben sie die allgemeine Lösung dieser Bewegungsgleichung an. Finden sie zudem die Zwangskraft \vec{Z} . (3 Punkte)
- Berücksichtigen sie nun die Gravitationskraft \vec{F}_g . Wie lautet die entsprechende Bewegungsgleichung für $s(t)$ nun? Bestimmen sie zuerst die partikuläre Lösung dieser Gleichung und geben sie dann die Lösung mit den Anfangsbedingungen $s(0) = 1$ und $\dot{s}(0) = 0$ an. (3 Punkte)