KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Theoretische Physik B - Lösungen SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman

Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 3

27.04.2010

---

1. Doppel-Pendel (6 Punkte)

Wir beschreiben die Massenpunkte durch die Koordinaten $\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ und $\vec{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$. Erst formulieren wir die Zwangsbedingungen $F_\alpha = 0, \alpha = 1, 2$.

$$F_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\vec{r}_1|^2 - l_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$F_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2 - l_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l_2^2 = 0$$

Auf beide Massen wirkt die Schwerkraft. Die Lagrange-Gleichungen erster Art lauten

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -m_1 g \vec{e}_z + \lambda_1 \nabla_{\vec{r}_1} F_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \lambda_2 \nabla_{\vec{r}_1} F_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -m_2 g \vec{e}_z + \lambda_1 \nabla_{\vec{r}_2} F_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \lambda_2 \nabla_{\vec{r}_2} F_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (2)$$

Das ergibt

$$m_1 \ddot{x}_1 = 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 (x_1 - x_2) \quad (3)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = 2\lambda_1 y_1 + 2\lambda_2 (y_1 - y_2) \quad (4)$$

$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + 2\lambda_1 z_1 + 2\lambda_2 (z_1 - z_2) \quad (5)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -2\lambda_2 (x_1 - x_2) \quad (6)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -2\lambda_2 (y_1 - y_2) \quad (7)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = -m_2 g - 2\lambda_2 (z_1 - z_2) \quad (8)$$

Zusammen mit den Zwangsbedingungen sind das 8 Gleichungen für 8 Variablen:

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \lambda_1, \lambda_2$$

.

2. Massenpunkt auf einer Kugel (8 Punkte)

(a) Die Zwangsbedingung lautet $F(\vec{r}) = \sqrt{x^2 + z^2} - R = 0$. Da die Zwangskraft senkrecht zu der Oberfläche $F(\vec{r}) = 0$ sein muss, sehen wir dass $\vec{Z} = \lambda \vec{e}_r$. Die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen erster Art) sind:

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_z + \lambda \vec{e}_r\,, \quad (9)$$

$$r = R\,. \quad (10)$$

(b) Wir wollen $\ddot{\vec{r}}$ in Kugel-Koordinaten (mit $\phi = 0$) ausdrücken. Dann gilt $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$, und $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\cos\theta \vec{e}_x - \dot{\theta}\sin\theta \vec{e}_z = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Dies ergibt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Die zweite Ableitung ergibt (mit $\dot{\vec{e}}_\theta = -\vec{e}_r\dot{\theta}$)

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

Jetzt können wir Gl. (9) auf $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\theta$ projezieren. Die Projektion auf $\vec{e}_r$ ergibt

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mg\cos\theta + \lambda$$

Die Projektion auf $\vec{e}_\theta$ ergibt

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = mg\sin\theta$$

Zusätzlich gilt die Zwangsbedingung $r = R$ und daher $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Dies ergibt

$$-mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + \lambda\,, \tag{11}$$
$$mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta\,. \tag{12}$$

Wir multiplizieren Gl. (12) mit $\dot{\theta}$ und integrieren. Das ergibt

$$(1/2)mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + c_0$$

Die Konstante c_0 wird durch die Anfangsbedingungen gefunden. Da am Anfang $\dot{\theta} = 0$, haben wir $c_0 = mg\cos\theta_0$. Einsetzen in Gl. (11) liefert

$$mR\dot{\theta}^2 = -2mg(\cos\theta - \cos\theta_0) = mg\cos\theta - \lambda$$

und schließlich

$$3\cos\theta = 2\cos\theta_0 + \frac{\lambda}{mg}$$

Das ergibt θ als Funktion von θ_0 und λ. Beachten Sie, dass die Zwangskraft λ eine zeitabhängige Grösse ist.

(c) Ab dem Zeitpunkt, zu dem der Massenpunkt die Kugel verlässt, bewegt sich der Massenpunkt frei. Deshalb wirkt auf den Massenpunkt keine Zwangskraft mehr. Das bedeutet, dass dieser Zeitpunkt durch $\lambda = 0$ bestimmt wird. Dann finden wir

$$3\cos\theta_c = 2\cos\theta_0$$

Da θ_0 klein ist, gilt $\cos\theta_0 \approx 1$ und $\cos\theta_c \approx 2/3$. Oder genauer: $\cos\theta_0 \approx 1 - \theta_0^2/2$ und $\cos\theta_c \approx 2/3 - \theta_0^2/3$.

3. Perle auf einer rotierenden Stange (6 Punkte)

(a) Zwangsbedingung: Der gegebene Neigungswinkel $\alpha(t)$ schreibt für x und y das Verhältnis $\dfrac{y}{x} = \tan(\alpha(t))$ vor, das für alle Zeiten eingehalten werden muß. Dies wird umgeschrieben als

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin(\alpha(t))}{\cos(\alpha(t))} \implies g(x,y,t) = y\cos(\alpha(t)) - x\sin(\alpha(t)) = 0$$

mit $\alpha(t) = \omega t$. Damit gilt für die

$$\text{Zwangskraft:}\;\; \vec{Z} = \lambda \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} (y\cos(\alpha(t)) - x\sin(\alpha(t))) = \lambda \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

Die Langrange-Bewegungsgleichung 1. Art lautet damit in kartesischen Koordinaten

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

Umschreiben auf die Koordinaten

$$x(t) = s(t)\cos(\alpha(t)) \quad \text{und} \quad y(t) = s(t)\sin(\alpha(t))$$

führt aus die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m(\ddot{s}\cos(\omega t) - 2\dot{s}\omega\sin(\omega t) - s\omega^2\cos(\omega t)) &= -\lambda\sin(\omega t) &(13)\\ m(\ddot{s}\sin(\omega t) + 2\dot{s}\omega\cos(\omega t) - s\omega^2\sin(\omega t)) &= +\lambda\cos(\omega t) &(14)\end{aligned}$$

Multiplikation von Gl. (13) mit $\cos(\omega t)$ und Gl. (14) mit $\sin(\omega t)$ bzw. Multiplikation von Gl. (13) mit $-\sin(\omega t)$ und Gl. (14) mit $\cos(\omega t)$ und Addition beider Gleichungen führt auf

$$\begin{aligned} \ddot{s}(t) &= s(t)\omega^2 &(15)\\ \lambda &= 2m\dot{s}(t)\omega &(16)\end{aligned}$$

Die gesuchte Bewegungsleichung (15) kann man als eine eindimesionale Bewegung (in s-Richtung) verstehen unter Einfluss der Zentrifugalkraft $F_{Z,s} = m\omega^2 s$.
Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$s(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \qquad (17)$$

wobei die Konstanten A, B durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden. Im allgemeinen wird die Perle mit exponentiell anwachsender Geschwindigkeit nach aussen weggeschleudert.
Die Zwangskraft ergibt sich zu

$$\vec{Z} = \lambda \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} = 2m\dot{s}(t)\omega\vec{e}_\phi = 2m\omega^2\left(Ae^{\omega t} - Be^{-\omega t}\right)\vec{e}_\phi$$

(b) Berücksichtigt man nun zudem die Gravitationskraft so lauten die Lagrange-Gleichungen erster Art

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Analoges Vorgehen wie oben führt auf die gesuchte Bewegungsgleichung für $s(t)$:

$$\ddot{s}(t) - \omega^2 s(t) = -g\sin(\omega t)$$

Für die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $s_p(t) = C\sin(\omega t)$. Ableiten und Einsetzen gibt $-C\omega^2 - \omega^2 C = -g$, und damit erhält man

$$C = g/(2\omega^2) \quad \Rightarrow s_p(t) = \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$s(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)$$

mit 2 Integrationskonstanten A, B.
Anfangsbedingungen: $s(0) = 1, \dot{s}(0) = 0$. Mit der allgemeinen Lösung $s(t)$ gibt das

$$A + B = 1 \quad , \quad A - B = -\frac{g}{2\omega^2}$$

und somit

$$s(t) = \frac{1}{2}(1 - \frac{g}{2\omega^2})e^{\omega t} + \frac{1}{2}(1 + \frac{g}{2\omega^2})e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)$$