

Theoretische Physik B SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 4
04.05.2010

1. Mathematische Quickies

(6 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen einige grundlegende mathematische Techniken zum Thema partielle und totale Ableitungen von Funktionen, sowie zu Differentialoperationen von Skalar- und Vektorfeldern geübt werden.

(a) Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x^4 + l^4} \quad \text{wobei} \quad x(t) = l \sin \omega t$$

Bestimmen sie die Ableitung $\frac{df}{dt}$. (2 Punkte)

(b) Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, t) = x^2 + \sqrt{x^4 + y^4} + v^2 t^2 \quad \text{wobei} \quad x(t) = l \sin \omega t, \quad y(t) = l \cos \omega t.$$

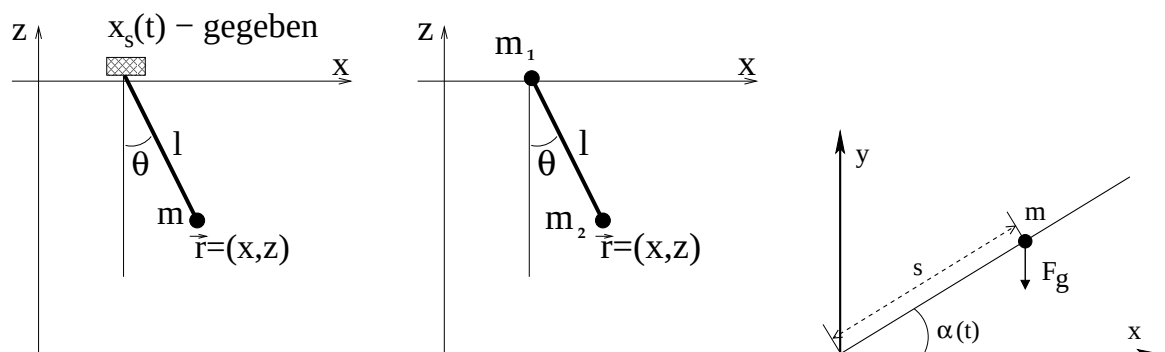
Bestimmen sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$, sowie die totale Ableitung $\frac{df}{dt}$. (2 Punkte)

(c) Gegeben seien ein Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(\vec{r}) = (\vec{r}\vec{s})^2 + l^2 x^2, \\ \vec{F}(\vec{r}) = (yz, xz, y^2 - x^2).$$

Berechnen sie $\vec{\nabla} f(\vec{r})$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r})$. (2 Punkte)

2. Lagrange-Formalismus zweiter Art: Einige Lagrange-Funktionen (6 Punkte)



(a) Pendel mit erzwungener bewegter Aufhängung.

(b) Pendel mit beweglicher Aufhängung.

(c) Perle auf rotierendem Stab.

Abbildung 1: Das Pendel mit erzwungener bewegter Aufhängung 1(a) und mit massebehafteter beweglicher Aufhängung 1(b). Die Perle auf dem rotierenden Stab 1(c).

- (a) Betrachten sie (analog zu Aufgabe 1 von Übungsblatt 1) ein Pendel mit einer erzwungenen bewegten Aufhängung (siehe Abb. 1(a)). Die zeitabhängige Position der Aufhängung ist durch die Funktion $x_s(t)$ gegeben. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion und leiten Sie die Bewegungsgleichung her (die Lösung ist nicht verlangt). (2 Punkte)
- (b) Die Aufhängung wird nun durch eine Masse m_1 ersetzt, die sich entlang der x -Achse reibungsfrei bewegen kann (siehe Abb. 1(b)). Bestimmen sie die Lagrange-funktion dieses Systems. (2 Punkte)
- (c) Betrachten sie eine Perle der Masse m , die sich reibungsfrei auf einem Stab bewegen kann, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert (analog zu Aufgabe 3 von Übungsblatt 2) unter dem Einfluss der Gravitationskraft (siehe Abb. 1(c)). Bestimmen sie ebenfalls die Lagrange-funktion und geben sie die Bewegungsgleichung an (die Lösung ist nicht verlangt). (2 Punkte)

3. Das ebene Doppelpendel

(8 Punkte)

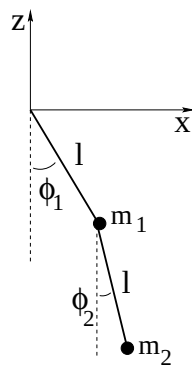


Abbildung 2: Das ebene Doppelpendel.

Betrachten Sie ein ebenes Doppelpendel das aus zwei unterschiedlichen Massen m_1 und m_2 besteht, welche sich nur in der x - z Ebene bewegen können. Die Massen sind miteinander und mit einem Aufhängepunkt durch zwei massenlose Stäbe der Länge l verbunden (siehe Abb. 2). Als generalisierte Koordinaten wählen wir die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 (siehe Abb. 2).

- (a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2)$ an. Leiten Sie dann die Bewegungsgleichungen für ϕ_1 und ϕ_2 her. (4 Punkte)
Hinweis: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- (b) Für kleine Schwingungen gilt $\phi_1 \ll 1$, $\phi_2 \ll 1$. Vereinfachen Sie in diesem Falle die Bewegungsgleichungen durch Linearisieren. Um die linearisierte Gleichungen zu lösen, benutzen Sie den Ansatz

$$\phi_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad \phi_2 = a_2 e^{i\omega t}, \quad (1)$$

wobei ω eine zu bestimmende Frequenz ist. Bestimmen sie die erlaubten Frequenzen (sog. Eigenfrequenzen). Geben Sie die Eigenfrequenzen für die Grenzfälle $m_1 \gg m_2$ und $m_1 \ll m_2$ an und diskutieren Sie beide Fälle physikalisch. (4 Punkte)

Hinweis: Es gibt nochmals eine kleine Änderung bezüglich der Beratungstutorien. Diese finden ab sofort statt (jeweils Donnerstags)

14.00 - 15.30 Uhr im Lehmann HS und 15.45 - 17.15 Uhr in Raum 12.1