

Theoretische Physik B - Lösungen SS 10**Prof. Dr. Alexander Shnirman****Blatt 4****Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt****04.05.2010****1. Mathematische Quickies**

(6 Punkte)

(a)

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = \left[2x + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + l^4}} \right] l\omega \cos \omega t = l^2 \omega \sin 2\omega t \left[1 + \frac{\sin^2 \omega t}{\sqrt{\sin^4 \omega t + 1}} \right].$$

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + y^4}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y^3}{\sqrt{x^4 + y^4}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2v^2 t,$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= 2v^2 t + \left[2x + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + y^4}} \right] l\omega \cos \omega t - \frac{2y^3}{\sqrt{x^4 + y^4}} l\omega \sin \omega t \\ &= 2v^2 t + l^2 \omega \sin 2\omega t \left[1 - \frac{2 \cos 2\omega t}{\sqrt{3 + \cos 4\omega t}} \right]. \end{aligned}$$

(c)

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = 2(\vec{r}\vec{s})\vec{s} + 2l^2 x \vec{e}_x.$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0.$$

2. Lagrange-Formalismus zweiter Art: Einige Langrange-Funktionen (6 Punkte)(a) Wir benutzen $x = x_s(t) + l \sin \theta$ und $z = -l \cos \theta$. Für die kinetische Energie gilt

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}_s^2 + 2\dot{x}_s l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2)$$

Die potenzielle Energie ist

$$U = mgz = -mgl \cos \theta$$

Die Lagrange-Funktion dann lautet

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}_s^2 + 2\dot{x}_s l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2) + mgl \cos \theta$$

Die Bewegungsgleichung ist

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

Das ergibt

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}_s l \cos \theta + ml^2 \dot{\theta}) = -m\dot{x}_s l \sin \theta \dot{\theta} - mgl \sin \theta$$

und schließlich

$$l\ddot{\theta} = -g \sin \theta - \cos \theta \ddot{x}_s$$

- (b) Durch Einführung der Koordinate x_1 des Punktes m_1 und des Winkels θ zwischen dem Pendelfaden und der Vertikalen erhält man die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta} \dot{x}_1 \cos \theta) + m_2 gl \cos \theta$$

- (c) Hier hat man

$$x(t) = s(t) \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad y(t) = s(t) \sin(\omega t)$$

und damit ergibt sich die Lagrange-Funktion zu

$$L = \frac{m}{2} (\dot{s}^2 + s^2 \omega^2) - mgs \sin(\omega t).$$

Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung zu

$$\ddot{s} = \omega^2 s - g \sin(\omega t)$$

3. Das ebene Doppelpendel

(8 Punkte)

- (a) Wir haben $x_1 = l \sin \phi_1$, $z_1 = -l \cos \phi_1$, $x_2 = x_1 + l \sin \phi_2$, und $z_2 = z_1 - l \cos \phi_2$. Dann gilt

$$\dot{x}_1 = l\dot{\phi}_1 \cos \phi_1$$

$$\dot{z}_1 = l\dot{\phi}_1 \sin \phi_1$$

$$\dot{x}_2 = l\dot{\phi}_1 \cos \phi_1 + l\dot{\phi}_2 \cos \phi_2$$

$$\dot{z}_2 = l\dot{\phi}_1 \sin \phi_1 + l\dot{\phi}_2 \sin \phi_2$$

Die kinetische Energie dann lautet

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 (\dot{\phi}_2^2 + 2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2)$$

wobei wir $\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2 = \cos(\phi_1 - \phi_2)$ benutzt haben.

Die potenzielle Energie lautet

$$U = g(m_1 z_1 + m_2 z_2) = -(m_1 + m_2) gl \cos \phi_1 - m_2 gl \cos \phi_2$$

Die Lagrange-Funktion ist

$$L(\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2) = T - U$$

Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art lauten $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = \frac{\partial L}{\partial \phi_1}$ und $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = \frac{\partial L}{\partial \phi_2}$. Das ergibt

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left[\dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right] + \frac{g}{l} \sin \phi_1 = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{\phi}_2 + \left[-\dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right] + \frac{g}{l} \sin \phi_2 = 0 \quad (2)$$

- (b) Für kleine Schwingungen $\phi_1 \ll 1$, $\phi_2 \ll 1$ können die Gleichungen (1) und (2) linearisiert werden. Das bedeutet, dass wir die folgenden Näherungen benutzen: $\sin \phi_1 \approx \phi_1$, $\sin \phi_2 \approx \phi_2$, $\cos \phi_1 \approx 1$, $\cos \phi_2 \approx 1$. Dann gilt auch $\sin(\phi_1 - \phi_2) \approx \phi_1 - \phi_2$ und $\cos(\phi_1 - \phi_2) \approx 1$.

Das führt zu folgenden Gleichungen:

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\phi}_2 + \frac{g}{l} \phi_1 = 0 \quad (3)$$

$$\ddot{\phi}_2 + \ddot{\phi}_1 + \frac{g}{l} \phi_2 = 0. \quad (4)$$

Um diese Gleichungen zu lösen, benutzen wir den Ansatz

$$\phi_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad \phi_2 = a_2 e^{i\omega t}, \quad (5)$$

wobei ω eine Frequenz ist, die wir bestimmen wollen. Wir setzen den Ansatz in Gl. (3) und (4) ein. Dann eliminieren wir a_1 durch

$$a_1 = \left(\frac{g}{l} - \omega^2 \right) \frac{a_2}{\omega^2},$$

und zeigen, dass ω durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$\frac{1}{\omega^2} \left[\frac{g}{l} - \omega^2 \right]^2 - \frac{m_2 \omega^2}{m_1 + m_2} = 0. \quad (6)$$

Die Lösungen dieser Gleichung lauten

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{g/l}{1 \mp \sqrt{m_2/(m_1 + m_2)}} \quad (7)$$

Für $m_1 \gg m_2$ gilt

$$\omega_{\pm}^2 \approx g/l$$

Das bedeutet, dass die Masse m_1 fast ruhig ist, und die Masse m_2 oszilliert mit der üblichen Frequenz $\sqrt{g/l}$.

Für $m_1 \ll m_2$ gilt

$$\omega_-^2 \approx g/(2l)$$

und

$$\omega_+^2 \approx (2g/l)(m_2/m_1)$$

Die erste Mode (ω_-) entspricht einem Pendel der Länge $2l$. Für diese Mode gilt $a_2 \approx a_1$, d.h., dass das Doppelpendel sich wie ein einzelnes Pendel der Länge $2l$ bewegt. Für die zweite Mode gilt $a_2 \approx -a_1$. Das bedeutet, dass die Masse m_2 ungefähr in Ruhe ist und m_1 schwingt.