Theoretische Physik B SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman

Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 5

11.05.2010

---

1. Sphärisches Pendel (8 Punkte)

Betrachten sie eine Kugel der Masse m, welche an einem masselosen Stab mit fester Länge l aufgehängt ist. Der Aufhängepunkt soll sich dabei im Ursprung einer Ebene (etwa der Zimmerdecke) befinden, die als x-y-Ebene gewählt wird. Die z-Achse zeige dabei nach unten (siehe Abb. 1).

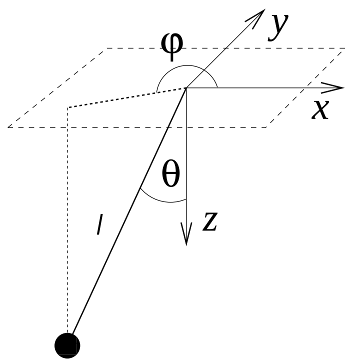

Abbildung 1: Das sphärische Pendel

(a) Die generalisierten Koordinaten seien die Winkel θ und φ für die Auslenkung aus der Senkrechten und die Projektion in die x-y-Ebene. Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}; \varphi, \dot{\varphi})$. (2 Punkte)

(b) Bestimmen sie die beiden verallgemeinerten Impulse p_φ und p_θ. Zeigen sie, dass p_φ erhalten ist, da φ eine zyklische Koordinate ist. Zeigen sie zudem, dass $p_\varphi = L_z$ gilt wobei L_z die z-Komponente des Drehimpulses $\vec{L} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$ ist. (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie unter Ausnutzung dieser Erhaltungsgrösse die Bewegungsgleichung $\ddot{\theta} = f(\theta)$ für $\theta(t)$. Wie lautet $f(\theta)$ für kleine θ? Interpretieren sie die beiden auftretenden Terme. (2 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass diese Gleichung (im Falle kleiner θ) näherungsweise in einen harmonischen Oszillator mit verschobener Ruhelage θ_0 übergeht. Welche Bewegung führt das Pendel aus (qualitativ, ohne Lösung)? (2 Punkte)
Hinweis: Die Ruhelage θ_0 des Pendels erhalten sie über die Bedingung $f(\theta_0) = 0$ (begründen sie dies auch). Führen sie anschließend eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung um den Punkt θ_0 durch: $f(\theta) \approx f(\theta_0) + f'(\theta_0)(\theta - \theta_0)$.

2. Mathematisches Pendel in 2 Dimensionen - Energieerhaltung (5 Punkte)

Das mathematische Pendel (eine Masse m hängt an einem masselosen Faden der Länge l im Schwerefeld der Erde) soll durch Ausnutzen der Energieerhaltung gelöst werden. φ ist der Auslenkungswinkel aus der Senkrechten.

(a) Geben Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi})$ an . Bestimmen sie dann mittels $E = \dot{\varphi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L}$ die Energie des Systems. Prüfen Sie zuletzt explizit nach, dass Energieerhaltung gilt, indem sie $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$ unter Ausnutzung der Euler-Lagrange-Gleichung berechnen. (2 Punkte)

(b) $\varphi(t)$ soll nun für eine gegebene Energie $\bar{E}$ berechnet werden, φ sei klein: Schreiben Sie dazu $\bar{E} = E(\varphi, \dot{\varphi})$ in der Form $\dot{\varphi} = u(\varphi)$ und dann $\frac{1}{u(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t$. Entwickeln sie dazu das Potential bis zur zweiten Ordnung in φ und verwenden sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$. Wie lautet also $\varphi(t)$? Wo gehen die Anfangsbedingungen ein ? Geben Sie $\varphi(t)$ an für $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$. (3 Punkte)

3. Orthogonale Transformationen und Drehimpulserhaltung (7 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen sie sogenannte orthogonale Transformationen kennenlernen. Darunter versteht man Abbildungen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \to \vec{x}' = T(\vec{x}) = D\vec{x}$ mit $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, für die gilt: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle T(\vec{x}), T(\vec{y}) \rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standartskalarprodukt bezeichnet.

(a) Zeigen sie, dass die Abbildung T längenerhaltend ist, d.h. dass gilt $|\vec{x}| = |T(\vec{x})|$. Zeigen sie zudem, dass für orthogonale Transformationen $D^T D = 1$ und $\det(D) = \pm 1$ gilt. (2 Punkte)

Abbildungsmatrizen mit $\det(D) = +1$ nennt man Drehmatrizen (man nennt die Menge dieser Matrizen auch SO(3): *special orthogonal group*). So ist z.B. eine Drehung um die z-Achse um den Windel α gegeben durch

$$D_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

(b) Prüfen sie die Eigenschaften $D^T D = 1$ und $\det(D) = +1$ für die Matrix $D_z(\alpha)$ explizit nach und testen sie für $\alpha = \pi/2$ die Wirkung auf die Vektoren $\vec{a} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{b} = (1, 1, 0)^T$ und $\vec{c} = (0, 0, 1)^T$. (1 Punkt)

In der Vorlesung haben sie das Noether-Theorem kennengelernt, welches einen Zusammenhang zwischen Symmetrien eines physikalischen Systems und Erhaltungsgrössen (oft auch Integrale der Bewegung genannt) herstellt. Zur Herleitung wurde davon ausgegangen, dass es eine Schar von Kurven $q_j(t, \alpha)$ gibt mit der Eigenschaft $\mathcal{L}(q_j(t, \alpha), \dot{q}_j(t, \alpha), t) = \mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t)$. Die erhaltene Größe Q ist dann gegeben durch

$$Q = \sum_j p_j \frac{\partial q_j}{\partial \alpha}$$

wobei p_j den verallgemeinerten Impuls bezeichnet.

(c) Die Ableitung der Erhaltung des Drehimpulses folgt aus der Isotropie des Raumes, welche impliziert, dass sich die mechanischen Eigenschaften eines abgeschlossenen Systems bei einer beliebigen Drehung des Gesamtsystems nicht ändern.
Betrachten sie dazu zuerst in kartesischen Koordinaten eine *infinitesimale* Drehung

(Winkel $d\alpha$) eines Ortsvektors $\vec{r}$ um die z-Achse $\vec{e}_z$ unter Verwendung der Drehmatrix (1) und zeigen sie, dass gilt

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + (\vec{e}_z \times \vec{r})\, d\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad d\vec{r} = (\vec{e}_z \times \vec{r})\, d\alpha\,.$$

Machen sie sich dann klar (Skizze!), dass für die Drehung des Ortsvektors $\vec{r}_j$ um eine beliebige Achse $\vec{n}$ gilt

$$d\vec{r}_j = (\vec{n} \times \vec{r}_j)\, d\alpha\,.$$

und zeigen sie damit und unter Verwendung der Relation $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, dass der Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{p}_j$ des Systems erhalten ist.
(2.5 Punkte)

(d) Die Lagrangefunktion des Kepplerproblems (für die Relativbewegung) ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + \frac{\alpha}{r}$$

Finden sie die Bewegungsgleichung für $\vec{r}$. Begründen sie (i) durch Symmetrieüberlegung (ohne Rechnung) und (ii) durch explizites ausführen von $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$, dass der Drehimpuls in diesem Problem erhalten ist. Reduzieren die damit die Dimensionalität der Lagrangefunktion entsprechend. Berechnen sie zudem die Energie und eliminieren sie darin die zyklische Variable.
(1.5 Punkte)