

Theoretische Physik B - Lösungen SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 5
11.05.2010

1. Sphärisches Pendel

(8 Punkte)

(a) Transformation auf die generalisierten Koordinaten (= Kugelkoordinaten):

$$\begin{aligned} x &= l \sin(\theta) \cos(\varphi) & \dot{x} &= l \cos(\theta) \dot{\theta} \cos(\varphi) - l \sin(\theta) \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ y &= l \sin(\theta) \sin(\varphi) & \dot{y} &= l \cos(\theta) \dot{\theta} \sin(\varphi) + l \sin(\theta) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ z &= l \cos(\theta) & \dot{z} &= -l \sin(\theta) \dot{\theta} \end{aligned} \quad \Longrightarrow$$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m l^2 \{ (\dot{\theta})^2 [\cos^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \cos^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta)] + \\ &\quad + (\dot{\varphi})^2 [\sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi)] + \\ &\quad + 2 \dot{\theta} \dot{\varphi} [0] \} \\ &= \frac{1}{2} m l^2 [(\dot{\theta})^2 + \sin^2(\theta) (\dot{\varphi})^2] \end{aligned}$$

potentielle Energie:

$$V = mgh = -mgz = -mgl \cos(\theta)$$

für geeignet gewählten Bezugspunkt $h = 0$. Damit lautet die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}; \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m l^2 [(\dot{\theta})^2 + (\sin(\theta) \dot{\varphi})^2] + mgl \cos(\theta)$$

(b) Lagrangegleichung allgemein: $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$ für jede generalisierte Koordinate q .

Zuerst: $q = \varphi$,

$$p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt} p_{\varphi} = \frac{d}{dt} L_z = 0 \quad \text{mit} \quad L_z := m(l \sin(\theta))^2 \dot{\varphi}$$

Bedeutung: Es gibt offenbar eine Erhaltungsgröße (= Integral/Konstante der Bewegung). Dies ist L_z , der Drehimpuls in z -Richtung. L_z ist erhalten, weil die Lagrangefunktion nicht von φ abhängt (φ ist eine "zyklische" Koordinate), also symmetrisch bezüglich (= invariant unter) Drehungen um die z -Achse ist. Letzteres ist ja auch anschaulich klar.

(Achtung: die Erhaltungsgröße ist der Drehimpuls L_z , *nicht* etwa die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$!)

Nun: $q = \theta$,

$$p_{\theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m l^2 \sin(\theta) \cos(\theta) (\dot{\varphi})^2 - mgl \sin(\theta)$$

- (c) Die Bewegungsgleichung für θ ist damit gegeben durch

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) + (\dot{\varphi})^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

Wenn wir jetzt $\dot{\varphi}$ durch L_z ersetzen, erhalten wir eine (nichtlineare) Bewegungsgleichung alleine für $\theta(t)$, denn L_z ist ja zeitlich konstant. Einsetzen von $\dot{\varphi} = L_z / (ml^2 \sin^2(\theta))$ ergibt also

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{L_z^2 \cos(\theta)}{m^2 l^4 \sin^3(\theta)}$$

Für kleine Auslenkungen θ entwickelt man wie üblich $\sin(\theta) \approx \theta$ und $\cos(\theta) \approx 1 \Rightarrow$

$$\ddot{\theta} = f(\theta), \quad f(\theta) = -\frac{g}{l} \theta + \frac{L_z^2}{m^2 l^4 \theta^3}$$

Diese Bewegungsgleichung ist natürlich immer noch nicht ohne weiteres lösbar. Offenbar setzt sich die generalisierte "Kraft" $f(\theta)$ aus zwei gegensätzlichen Anteilen zusammen: die rücktreibende Kraft $-\frac{g}{l} \theta$ des harmonischen Pendels und die nach außen gerichtete Zentrifugalkraft.

- (d) Es ergibt sich eine neue Ruhelage $\theta_0 > 0$, die durch L_z bestimmt wird, was wiederum durch Anfangsbedingungen vorgegeben wird. Ruhelage:

$$f(\theta_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \left(\frac{L_z^2}{m^2 g l^3} \right)^{1/4}$$

Die Näherung besteht nun darin, für kleine Auslenkungen um diese Ruhelage zu entwickeln: Taylor:

$$f(\theta) \approx \underbrace{f(\theta_0)}_{=0} + f'(\theta_0) (\theta - \theta_0), \quad f'(\theta_0) = -\frac{g}{l} - 3 \frac{L_z^2}{m^2 l^4 \theta_0^4} = -4 \frac{g}{l}$$

Einsetzen von $f(\theta)$ liefert die genäherte Bewegungsgleichung für $\theta(t)$,

$$\ddot{\theta}(t) + 4 \frac{g}{l} [\theta(t) - \theta_0] = 0$$

also ein harmonisches Pendel (Oszillator) mit verschobener Ruhelage θ_0 und erhöhter Eigenfrequenz $\omega_0 = 2\sqrt{g/l}$. Dieser Pendelbewegung in θ -Richtung ist eine Kreisbewegung in der x - y -Ebene überlagert. Diese ist allerdings nicht gleichförmig, da (wie gesagt) $\dot{\varphi}$ nicht konstant ist (sondern L_z). Nur im Spezialfall $\theta(t) = \theta_0$ (also wenn keine Schwingung vorliegt) ist $\dot{\varphi} = \text{const.}$

2. Mathematisches Pendel - Energieerhaltung

(5 Punkte)

- (a) Angenommen, das Pendel schwingt in der x - y -Ebene, y zeigt nach unten (Richtung der Schwerkraft), dann ist $x = l \sin(\varphi)$, $y = l \cos(\varphi)$, und die kinetische Energie lautet (wie üblich) $T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi})^2$. Die potentielle Energie ist $U(\varphi) = mgh = -mgl \cos(\varphi)$. Damit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) &= T - U = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi})^2 - U(\varphi) \\ E(\varphi, \dot{\varphi}) &= \dot{\varphi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi})^2 + U(\varphi) \end{aligned}$$

Energieerhaltung:

$$\frac{dE}{dt} = ml^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \left[ml^2 \ddot{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] \dot{\varphi}$$

Mit der Lagrangegleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad \implies \quad ml^2 \ddot{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

folgt sofort $\frac{dE}{dt} = 0$.

- (b) Da die Gesamtenergie erhalten ist, können wir diese auf einen willkürlichen festen Wert $\bar{E}$ setzen und nach $\dot{\varphi}$ auflösen:

$$\bar{E} = E(\varphi, \dot{\varphi}) \implies \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2(\bar{E} - U(\varphi))}{ml^2}}$$

Trennung der Veränderlichen und Integration beider Seiten,

$$d\varphi = \sqrt{\frac{2(\bar{E} - U(\varphi))}{ml^2}} dt \implies dt = \sqrt{\frac{ml^2}{2(\bar{E} - U(\varphi))}} d\varphi \implies t - t_0 = \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\bar{E} - U(\varphi)}}$$

Für kleine Auslenkungen mit $\cos(\varphi) \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ wird das Potential

$$U(\varphi) \approx \frac{1}{2}mgl \varphi^2 - mgl$$

und wir müssen das Integral

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\bar{E} + mgl) - \frac{1}{2}mgl \varphi^2}}$$

berechnen. Die Konstante mgl kann als Bezugsenergie in $\bar{E}$ absorbiert werden, $(\bar{E} + mgl) \rightarrow \bar{E}$ (d.h., wir messen $\bar{E}$ relativ zu $-mgl$; wir hätten auch schon am Anfang einen entsprechenden Bezugspunkt im Potential wählen können). Das Integral lautet dann

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{ml^2}{2\bar{E}}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{mgl}{2\bar{E}} \varphi^2}}$$

Mit der Substitution $x = \sqrt{\frac{mgl}{2\bar{E}}} \varphi$ wird daraus

$$\omega(t - t_0) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin(x) - C = \arcsin\left(\sqrt{\frac{mgl}{2\bar{E}}} \varphi\right) - C \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Die beiden Integrationskonstanten t_0 und C können zusammengefasst werden, $\psi := \omega t_0 - C$,

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2\bar{E}}{mgl}} \sin(\omega t - \psi)$$

Für die Energie $\bar{E}$ wurde wieder E geschrieben.

Das $\varphi(t)$ von oben entspricht der allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (Lagrangegleichung) $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$. Die Anfangsbedingungen $\varphi(0)$ und $\dot{\varphi}(0)$ stecken hier in der Integrationskonstanten ψ und der (ebenfalls konstanten) Erhaltungsgröße E :

$$\varphi(0) = -\sqrt{\frac{2E}{mgl}} \sin(\psi) \quad , \quad \dot{\varphi}(0) = \sqrt{\frac{2E}{mgl}} \omega \cos(\psi)$$

Mit diesen zwei Gleichungen können die Anfangsbedingungen in ψ und E umgerechnet werden und umgekehrt. Beispiel:

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow \psi = 0 \quad , \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \Rightarrow \sqrt{\frac{2E}{mgl}} = \frac{\omega_0}{\omega} \Rightarrow \varphi(t) = \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

3. Orthogonale Transformationen und Drehimpulserhaltung (7 Punkte)

(a) Die Längerhaltung prüft man leicht durch

$$|\vec{x}|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle T(\vec{x}), T(\vec{x}) \rangle = |T(\vec{x})|^2$$

Für diese Abbildungen gilt

$$\vec{x}^T \cdot \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle T(\vec{x}), T(\vec{y}) \rangle = (D\vec{x})^T \cdot (D\vec{y}) = \vec{x}^T D^T D \vec{y}$$

und damit lässt sich die Eigenschaft $D^T D = 1$ ablesen. Mit dem Multiplikationssatz für Determinanten folgt

$$1 = \det(1) = \det(D^T D) = \det(D^T) \det(D) = (\det(D))^2$$

und damit

$$\det(D) = \pm 1$$

(b) Die genannten Eigenschaften prüft man leicht nach. Die Matrix ist für $\alpha = \pi/2$ gegeben durch

$$D_z(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$D_z(\pi/2)\vec{a} = (0, 1, 0)^T, \quad D_z(\pi/2)\vec{b} = (-1, 1, 0), \quad D_z(\pi/2)\vec{c} = \vec{c}$$

Die Vektoren werden also jeweils um 90° im Sinne der rechten Hand Regel gedreht. Da $\vec{c}$ auf der Drehachse liegt, bleibt er natürlich unverändert.

(c) Für einen infinitesimalen Winkel $d\alpha$ gilt

$$D_z(d\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -d\alpha & 0 \\ d\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit ($\vec{r} = (x, y, z)^T$)

$$\vec{r}' = D_z(d\alpha)\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + d\alpha \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + d\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r} + (\vec{e}_z \times \vec{r})d\alpha$$

Die lässt sich mit einer Skizze leicht eine allgemeine Drehachse verallgemeinern. Die Änderung $d\vec{r}$ steht dabei jeweils senkrecht auf der Drehachse und dem zu drehenden Vektor $\vec{r}$.

Damit kann man die auf dem Blatt gegebene Relation schreiben als

$$\frac{d\vec{r}_j}{d\alpha} = (\vec{n} \times \vec{r}_j)$$

Setzt man dies in die angegebene Beziehung des Noethertheorems ein, so erhält man unter Verwendung der angegebenen Beziehung (in kartesischen Koordinaten)

$$Q = \sum_j \vec{p}_j (\vec{n} \times \vec{r}_j) = \vec{n} \cdot \sum_j \vec{r}_j \times \vec{p}_j = \vec{n} \cdot \vec{L}$$

und damit ist der Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten.

(d) Die Euler-Lagrange-Gleichung führt auf die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r}$$

Aufgrund der Rotationsinvarianz des Potentials ist der Drehimpuls in diesem Problem erhalten. Dies rechnet man auch leicht mittels

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mu \left(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \right) = \mu \left(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} - \frac{\alpha}{r^3 \mu} \vec{r} \times \vec{r} \right) = 0$$

nach. Die Bewegung verläuft also in einer Ebene (wir wählen die x - y -Ebene). Nach Einführung von Polarkoordinaten r, ϕ erhalten wir

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{\alpha}{r}$$

Die Variable ϕ ist zyklisch, $p_\phi = m r^2 \dot{\phi} = L_z$ entspricht der z -Komponente des Drehimpulses. Da ebenfalls die Energie erhalten ist können wir schreiben

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

Die Lösung dieses Problems wurde in aller Ausführlichkeit auf Aufgabenblatt 0 gegeben.