Theoretische Physik B SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 6
18.05.2010

---

1. Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens (6 Punkte)

Die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens (Ladung q) im elektrischen ($\vec{E}$) und magnetischen ($\vec{B}$) Feld ist gegeben durch

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - q\,\phi(\vec{r},t) + \frac{q}{c}\,\dot{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r},t)$$

Dabei ist ϕ das elektrische Potenzial und $\vec{A}$ das sogenannte Vektorpotenzial. Daraus ergeben sich $\vec{E}$ und $\vec{B}$ als

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

wobei c die Lichgeschwindigkeit bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichung auf folgende Bewegungsgleichung führt

$$m\ddot{\vec{r}} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\,\dot{\vec{r}}\times\vec{B}\right)$$

wobei der 2. Term auf der rechten Seite die Lorenzkraft ist. (3 Punkte)
Hinweise: Zeigen sie zuerst, dass für ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r},t)$ gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{F}(\vec{r},t) = (\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}(\vec{r},t) + \frac{\partial\vec{F}(\vec{r},t)}{\partial t}$. Verwenden sie zudem die Relation $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$

(b) Bestimmen sie zunächst den verallgemeinerten (kanonischen) Impuls $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}}$. Zeigen sie dann, dass für die Energie gilt

$$E = \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2}{2m} + q\,\phi(\vec{r},t)\,.$$

(3 Punkte)

2. Das Brachistochrone Problem (10 Punkte)

Das Brachistochrone Problem (griechisch: *brachistos* kürzeste und *chronos* Zeit) kann wie folgt definiert werden:

Gegeben sind zwei Punkte A und B in einer vertikalen Ebene. Ein Massenpunkt der Masse m ist gezwungen, sich unter dem Einfluss der Gewichtskraft entlang einer Kurve $y(x)$ zu bewegen. Zu bestimmen ist nun diejenige Kurve $y(x)$, für welche die Zeit T um von A nach B zu gelangen minimal wird (Vgl. Abb. 2).

Im folgenden sollen sie diese Fragestellung mithilfe der Varationsrechnung beantworten. Wir wählen dazu speziell die Anfangsbedingungen $x_A = 0$ und $y_A = y(x_A) = 0$.

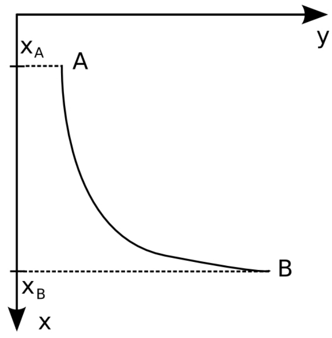

Abbildung 1: Das Brachistochrone Problem

(a) Begründen sie, dass das zu minimierende Funktional durch folgenden Ausdruck gegeben ist

$$T[y] = \int_{x_A}^{x_B} f(y, y', x)\, dx \qquad \text{mit} \qquad f(y, y', x) = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gx}}\,.$$

Hinweis: Starten (begründen sie dies auch) von dem Ausdruck $T = \int_A^B \frac{ds}{v}$, wobei v den Betrag der Geschwindigkeit bezeichnet. Nutzen sie die Energieerhaltung aus um zu dem gewünschten Ausdruck zu gelangen. (2 Punkte)

(b) Um das Funktional $T[y]$ nun zu minimieren, d.h. die optimale $y(x)$Kurve zu finden, führen sie analog zur Vorlesung eine Variation durch: Angenommen, $y(x)$ sei die gesuchte Funktion die $T[y]$ minimiert, dann wird $T[y]$ durch die Ersetzung $y(x) \to y(x) + \delta y(x)$ ($\delta y(x)$ heisst Variation mit $\delta y(x_A) = \delta y(x_B) = 0$) wachsen. Da $T[y]$ bei $\delta y(x) = 0$ ein Minimun hat gilt also $\delta T[y] = 0$. Zeigen sie durch Ausführen der Variation, dass für $y(x)$ die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

folgt. (2 Punkte)

(c) $f(y, y', x)$ hängt nicht von y ab, was ergibt sich folglich aus den Euler-Lagrange Gleichungen? Setzen sie für eine eventuell auftretende Konstante zweckmäßig const $\equiv \frac{1}{\sqrt{2gc_0}}$. Lösen sie die sich ergebende Differentialgleichung für $y(x)$ durch Trennung der Veränderlichen. (3 Punkte)
Hinweis: Verwenden sie das Integral

$$\int \sqrt{\frac{x}{\beta - x}}\, dx = -\sqrt{\beta x - x^2} - \beta \arcsin\sqrt{\frac{\beta - x}{\beta}}$$

(d) Bringen die das Ergebnis auf die Form

$$y(x) = c_0 \arccos\sqrt{\frac{c_0 - x}{c_0}} - \sqrt{c_0 x - x^2}\,.$$

Finden und interpretieren sie $y'(x = 0)$. Wodurch ist die Konstante c_0 bestimmt? Zeigen die schliesslich, dass diese Gleichung durch die Parameterdarstellung

$$x(t) = \frac{c_0}{2}\,(1 - \cos(t)) \qquad \text{und} \quad y(t) = \frac{c_0}{2}\,(t - \sin(t))$$

erfüllt wird. (3 Punkte)

3. Das hängende Seil - Variation mit Nebenbedingungen (4 Punkte)

Oft hat man es in der Variationsrechnung mit dem folgenden Problem zu tun

$$\int_a^b f(y, y', x)\, dx \to \text{minimal} \quad \text{mit der Nebenbedingung} \quad \int_a^b g(y, y', x)\, dx = C\,,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante bezeichnet. Analog zum Auffinden von Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher wird zur Lösung dieses Problems ein Lagrange-multiplikator λ eingeführt, so dass das folgende Problem zu lösen ist

$$\int_a^b h(y, y', x)\, dx \to \quad \text{minimal} \quad \text{mit} \quad h(y, y', x) = f(y, y', x) - \lambda g(y, y', x)$$

Der Parameter λ kann dann im Anschluss durch die Nebenbedingung bestimmt werden.

In dieser Aufgabe sollen die nun das Problem des im Schwerefeld der Erde hängenden Seiles (mit konstanter Massendichte ρ und vorgegebener Länge L) von Aufgabenblatt 2, Aufgabe 3 nochmals mittels der Variationsrechnung untersuchen.

(a) Zeigen Sie, dass für die entsprechenden Funktionale U und K gilt:

$$U = \rho g \int_{x_1}^{x_2} dx\, y\sqrt{1 + (y')^2} \qquad \text{mit der Nebenbedingung} \quad K = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + (y')^2} = L$$

(2 Punkte)

(b) Nutzen sie die Tatsache, dass $h(y, y', x)$ nicht explizit von x abhängt aus, um eine Erhaltungsgrösse zu finden. Bringen sie die Lösung auf die (allgemeine) Form

$$y(x) = \alpha + \beta \cosh(\frac{x}{\beta} + \gamma)$$

mit geeigneten Konstanten α, β, γ (eine spezifischere Lösung ist nicht verlangt, da diese schon auf Aufgabenblatt 2, Aufgabe 3 diskutiert wurde). (2 Punkte)
Hinweis: Sie benötigen das folgende Integral

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Hinweis: Wegen des Feiertags am Montag, den 24.5.2010 müssen die Aufgaben erst bis Dienstag, 25.5.2010, 10.00 Uhr abgeben werden.