Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Theoretische Physik B - Lösungen SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 6
18.05.2010

1. Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens (6 Punkte)

(a) Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \tag{1}$$

Erst berechnen wir die linke Seite der Gl. (1):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\vec{A}$$

Dann

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\ddot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}\left(\dot{\vec{r}}\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

wobei im letzen Term das Differenzialoperator ∇ nur auf $\vec{A}$ wirkt. Jetzt berechnen wir die rechte Seite der Gl. (1):

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -q\nabla\phi + \frac{q}{c}\nabla(\dot{\vec{r}}\vec{A})$$

wobei im letzen Term das Differenzialoperator ∇ nur auf $\vec{A}$ wirkt. Das ergibt

$$m\ddot{\vec{r}} = -q\nabla\phi - \frac{q}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}\left(\nabla(\dot{\vec{r}}\vec{A}) - \left(\dot{\vec{r}}\cdot\nabla\right)\vec{A}\right)$$

Wir benutzen jetzt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ wobei $\vec{a} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{b} = \nabla$, und $\vec{c} = \vec{A}$. Schließlich

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}}\times(\nabla\times\vec{A}) = q\vec{E} + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}}\times\vec{B}$$

(b) Der verallgemeinerte (kanonische) Impuls ergibt sich zu:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\vec{A} \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)$$

Für die Energie gilt:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\dot{\vec{r}} - L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\phi = \frac{\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2m} + q\phi$$

2. Das Brachistochrone Problem (10 Punkte)

(a) Zuerst einmal gilt natürlich

$$T = \int_A^B dt$$

Da weiterhin gilt $dt = \frac{ds}{v}$ mit dem Wegelement

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2} = dx\sqrt{1 + [y'(x)]^2}$$

erhält man die Beziehung

$$T = \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{v} .$$

Nun wird Energieerhaltung verwendet

$$0 = \frac{m}{2}v^2 - mgx \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gx} .$$

Erklärung: Auf der linken Seite steht die Energie am Punkt x_A, welche nur aus potentieller Energie besteht. Da zudem $x_A = 0$ gilt, ist diese Energie somit null. Auf der rechten Seite gibt es ein Minuszeichen vor der potentiellen Energie, da die x-Achse nach unten gerichtet ist.
Damit folgt also schliesslich

$$T = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{2gx}} .$$

(b) Es gilt

$$\delta T = \int_{x_A}^{x_B} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \right) .$$

Da nun $\delta y' = \frac{d}{dx}\delta y$ gilt hat man durch partielle Integration

$$\delta T = \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y \right]_{x_A}^{x_B} + \int_{x_A}^{x_B} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y .$$

Wegen $\delta y(x_A) = \delta y(x_B) = 0$ verschwindet der erste Ausdruck. Da δy beliebig ist muss also

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

gelten.

(c) Der Integrand $f(y, y', x) = \sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{2gx}}$ hängt nicht y ab, daher hat man

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const} \equiv \frac{1}{\sqrt{2gc_0}}$$

also

$$\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{2gx}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\sqrt{2gx}} = \frac{1}{\sqrt{2gc_0}} .$$

Auflösen nach y' ergibt

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{c_0 - x}} \tag{2}$$

Verwendet man nun das angebene Integral, so folgt

$$y(x) = c_1 - \sqrt{c_0 x - x^2} - c_0 \arcsin \sqrt{\frac{c_0 - x}{c_0}} \,.$$

Einsetzen der Randbegingung $y(x_A = 0) = y_A = 0$ führt auf $c_1 = c_0 \frac{\pi}{2}$.

(d) Damit hat man nun die gewünschte Form

$$y(x) = c_0 \arccos \sqrt{\frac{c_0 - x}{c_0}} - \sqrt{c_0 x - x^2} \,.$$

Die Bestimmung der Konstanten c_0 erfolgt über die Randbedingung $y(x_B) = y_B$, was i.a. zu einer transzendenten Gleichung führt. Aus Gl. (2) liesst man ab, dass $y'(x = 0) = 0$ ist, d.h. anfangs bewegt sich der Massenpunkt entlang der Gewichtskraft nach unten.
Mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos^2 t + \sin^2 t &= 1 \\ \cos^2(t/2) &= \frac{1}{2}\,(1 + \cos(t)) \end{aligned}$$

findet man

$$c_0 \arccos(\sqrt{\frac{c_0 - x(t)}{c_0}}) = c_0 \arccos(\sqrt{1/2(1 + \cos(t))}) = c_0 \arccos(\sqrt{\cos^2(t/2)}) = \frac{c_0}{2} t$$

und

$$-\sqrt{c_0 x - x^2} = -\sqrt{\frac{c_0^2}{4}\,(1 - \cos^2(t))} = -\frac{c_0}{2} \sin(t)$$

was also die angegebene Paramater-Form bestätigt. Die ideale Form der Bahnkurve entspricht also einer Zykloide.

3. Das hängende Seil (4 Punkte)

(a) Das Funktional K ist gerade die Weglänge

$$L = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \,.$$

Zum Funktional U: Ein Massenelemt der Masse dm hat die potenzielle Energie $dm\, g\, y = \rho\, g\, y\, ds$ mit der konstanten Massendichte $\rho = dm/ds$. Damit

$$U = \int_1^2 dm\, g\, y = \rho\, g \int_{x_1}^{x_2} dx\, y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$$

(b) Mit den oben hergeleiteten Ausdrücken ist

$$h(y, y', x) = \rho g y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} - \lambda \sqrt{1 + [y'(x)]^2} = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,(\rho g y(x) - \lambda)$$

Da $h(y, y', x)$ nicht explizit von x abhängt gilt

$$h - \frac{\partial h}{\partial y'} y' = a$$

mit einer Konstanten a. Also

$$\frac{\rho g\, y(x) - \lambda}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} = a \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y(x) - a_1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} = a_2$$

mit $a_1 = \frac{\lambda}{\rho g}$ und $a_2 = \frac{a}{\rho g}$. Umstellen nach y' ergibt

$$[y']^2 = \frac{(y - a_1)^2}{a_2^2} - 1$$

Substitution $z = \frac{y - a_1}{a_2}$ und ausnützen des angegebenen Integrales ergibt schliesslich

$$y(x) = a_1 + a_2 \cosh\left(\frac{x}{a_2} + \frac{a_3}{a_2}\right)$$

wobei a_3 eine Integrationskonstante ist.