KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE | INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Theoretische Physik B SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 7
25.05.2010

---

1. Die Wirkung (8 Punkte)

In der Vorlesung haben sie die Wirkung kennengelernt, die durch folgendes Funktional gegeben ist

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L\left(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t\right),$$

wobei L die Lagrangefunktion des betrachteten Systems bezeichnet. Für jede bestimmte Bahnkurve $\vec{r}(t)$ ist die Wirkung eine Funktion von Anfangs- und Endpunkt $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$, $\vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$. Im folgenden wollen wir uns auf eindimensionale Bewegungen beschränken. Bestimmen Sie für

(i) einen freien Massenpunkt der Masse m,

(ii) einen Massenpunkt der Masse m im Schwerefeld der Erde (d.h. in einem Potential $U(x) = -mg\,x$)

(iii) einen harmonischen Oszillator, d.h. einen Massenpunkt der Masse m im Potential $U(x) = m\omega^2 x^2/2$

die genaue Bahnkurve $x(t)$ und berechnen Sie damit die Wirkung $S(x_1, t_1; x_2, t_2)$. Begründen sie, wieso die Wirkung stets nur von der Differenz $t_2 - t_1$ abhängt.
Bestimmen sie zudem die Ableitungen

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial t_2}$$

in allen drei Fällen. Was ist die physikalische Interpretation dieser Ableitungen?

2. Prinzip der kleinsten Wirkung I (5 Punkte)

Betrachten Sie jetzt *beliebige* Variationen $\Delta x(t)$ von den genauen Bahnkurven $x(t)$, die Sie für die drei oben genannten Fälle bestimmt haben. Lassen Sie die Anfangsbedingungen fest, d.h.

$$\Delta x(t_1) = \Delta x(t_2) = 0.$$

(a) Zeigen sie, dass für die Fälle (i) und (ii) die Wirkung auf der genauen Bahnkurve ein absolutes Minimum besitzt, d.h. $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) > 0$ gilt. (Dies ist nicht mit einer infinitesimalen Variation $\delta x(t)$ zu verwechseln, für die $\delta S = 0$ gilt.) (2 Punkte)
Hinweis: Zeigen sie, dass gilt $\Delta S = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt (\Delta \dot{x}(t))^2$.

(b) Zeigen sie, dass im Falle des harmonischen Oszillators gilt:

$$\Delta S = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[(\Delta \dot{x}(t))^2 - \omega^2 (\Delta x(t))^2 \right].$$

Für welche Zeiten $t_2 - t_1$ besitzt ΔS ein absolutes Minimum? (3 Punkte)
Hinweis: Um diese Frage zu beantworten können sie z.B. den Ansatz einer Fourier-Reihe

$$\Delta x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin\left(\pi n \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)$$

machen und die Orthogonalität der Basisfunktionen ausnutzen.

3. Prinzip der kleinsten Wirkung II (7 Punkte)

Der schiefe Wurf einer Kugel der Masse m im Schwerefeld der Erde soll durch Variation aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung berechnet werden. Die Kugel bewegt sich in der x-z-Ebene, die Schwerkraft zeigt in negative z-Richtung.

(a) Berechnen Sie die Wirkung der Kugel, $S[\vec{r}] = \int_0^T \mathrm{d}t\, L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))\,.$

Für die zu variierende Bahn $\vec{r}(t)$, die von der Kugel in der Zeit $0 \le t \le T$ durchlaufen wird, soll dabei der Ansatz

$$x(t) = x_0 + v_x\, t + a\, t^2 \quad , \quad z(t) = z_0 + v_z\, t + b\, t^2$$

eingesetzt werden. x_0, z_0, v_x, v_z, a, b sind Konstanten. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Konstanten des Ansatzes so, daß S extremalisiert wird. Dabei sind die Endpunkte der Bahn einzusetzen, $x(0) = z(0) = 0\,, x(T) = x_m\,, z(T) = 0\,.$ Wie lautet also die Bahn, die von der Kugel tatsächlich durchlaufen wird?
(3 Punkte)
Hinweis: Mit den Endpunkten gilt $S[\vec{r}] = S(a, b)$ und für das Extremum muss $\frac{\partial S}{\partial a} = 0\,, \frac{\partial S}{\partial b} = 0$ gelten.

(c) Bestimmen Sie die Lagrangegleichungen und vergleichen Sie deren spezielle Lösung mit dem Ergebnis aus (b). (2 Punkte)