Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Theoretische Physik B - Lösungen SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 7
25.05.2010

---

1. Die Wirkung (6 Punkte)

(i) Die Bewegungsgleichung eines freien Teilchens lautet

$$m\ddot{x} = 0.$$

Integration dieser Gleichung von t_1 bis t mit der Definition $\dot{x}(t_1) = v_0$ ergibt

$$\dot{x} = v_0(t - t_1)\,.$$

Weitere Integration von t_1 bis t mit $x(t_1) = x_1$ ergibt

$$x(t) = x_1 + v_0(t - t_1)\,.$$

Um v_0 zu bestimmen benutzen wir nun $x(t_2) = x_2$, womit

$$v_0 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

folgt. Damit ist die Lösung mit der Randbedingungen $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ also gegeben durch

$$x(t) = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}(t - t_1)\,.$$

Die Lagrange-Funktion auf dieser Bahnkurve lautet

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) = \frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2}.$$

Die Wirkung ist damit

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1}.$$

Die Ableitungen sind gegeben durch:

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = m\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = mv,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_2} = -\frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} = -\frac{mv^2}{2}.$$

(ii) Die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Schwerefeld der Erde ist

$$m\ddot{x} = mg = F.$$

Analoges Vorgehen (Integration) zu (i) liefert als Lösung mit der Randbedingungen $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$

$$x(t) = x_1 + v_0(t - t_1) + F\frac{(t-t_1)^2}{2m},$$

wobei

$$v_0 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - F\frac{t_2 - t_1}{2m}.$$

Die Lagrange-Funktion auf dieser Bahnkurve ($U = -Fx$) lautet somit

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) + Fx(t) = \frac{mv_0^2}{2} + Fx_1 + 2v_0F(t - t_1) + \frac{F^2}{m}(t - t_1)^2.$$

Die Wirkung ist somit

$$S = \frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \frac{1}{2}F(x_1 + x_2)(t_2 - t_1) - \frac{F^2}{24m}(t_2 - t_1)^3.$$

Die Ableitungen sind hier gegeben durch:

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = m\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \frac{1}{2}F(t_2 - t_1) = m\dot{x}(t_2),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_2} = -\frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} + \frac{1}{2}F(x_1 + x_2) - \frac{F^2}{8m}(t_2 - t_1)^2 = -\frac{mv_0^2}{2} + Fx_1.$$

(iii) Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators ($U = m\omega^2 x^2/2$) lautet

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x.$$

Die Lösung mit der Randbedingungen $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ ist

$$x(t) = x_1 \cos\omega(t - t_1) + A\sin\omega(t - t_1),$$

mit

$$A = \frac{x_2 - x_1\cos\omega(t_2 - t_1)}{\sin\omega(t_2 - t_1)}.$$

Die Wirkung ist damit

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}m\omega\Big[(x_2 - x_1\cos\omega(t_2 - t_1))^2\cot\omega(t_2 - t_1) \\ &+ x_1^2\sin\omega(t_2 - t_1)\cos\omega(t_2 - t_1) - 2x_1x_2\sin\omega(t_2 - t_1)\Big]. \end{aligned}$$

Die Ableitungen sind gegeben durch:

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = m\omega\left[(x_2 - x_1\cos\omega(t_2 - t_1))\cot\omega(t_2 - t_1) - x_1\sin\omega(t_2 - t_1)\right] = m\dot{x}(t_2),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_2} = -\frac{m}{2}\dot{x}^2(t_2) - \frac{m}{2}\omega^2 x^2(t_2).$$

Zu den physikalische Bedeutungen der Ableitungen: Die Ableitung nach der Zeit t_2 ergibt

$$\frac{\partial S}{\partial t_2} = -E,$$

wo E ist die Energie ist. Die Ableitung nach dem Ort x_2 ergibt

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = p(t_2),$$

wobei $p(t_2) = mv(t_2)$ der Impuls im Punkt x_2 ist. Dies lässt sich auch ganz allgemein zeigen.
Die Wirkungen hängen hier nur von der Differenz $t_2 - t_1$ ab, da die jeweiligen Potentiale zeitunabhängig sind ("Homogenität der Zeit"). Zu den Abhängigkeiten der Orte: Nur im Falle (i) hängt die Wirkung allein von der Differenz $x_2 - x_1$ ab: $S = (x_2 - x_1)$. Dies ist eine Folge der Translationsinvarianz ("Homogenität des Raumes"), der Impuls ist entsprechend erhalten. Bei den Fällen (ii) und (iii) sind die Potentiale ja ortsabhängig, was die Translationsinsvarianz zerstört und somit eine Abhängigkeit von beiden Koordinaten mit sich zieht: $S = S(x_1, x_2)$.

2. Prinzip der kleinsten Wirkung I (6 Punkte)

(a) Für Fall (i) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Delta S &= S(x+\Delta x) - S(x) = \frac{m}{2}\left\{\int_{t_1}^{t_2} dt\,[\dot{x}(t) + \Delta\dot{x}(t)]^2 - \int_{t_1}^{t_2} dt\,[\dot{x}(t)]^2\right\} \\
&= \frac{m}{2}\left\{\int_{t_1}^{t_2} dt\,[\Delta\dot{x}(t)]^2 + 2\int_{t_1}^{t_2} dt\,[\dot{x}(t)\Delta\dot{x}(t)]\right\} \\
&= \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt\,[\Delta\dot{x}(t)]^2 + [m\dot{x}(t)\Delta x(t)]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\,[m\ddot{x}(t)]\,\Delta x(t) \\
&= \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt\,[\Delta\dot{x}(t)]^2,
\end{aligned}$$

wobei

$$\Delta\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\Delta x(t),$$

und partielle Integration benutzt wurde. Weiter gilt $\Delta x(t_1) = \Delta x(t_2) = 0$ und die Bewegungsgleichung lautet $m\ddot{x} = 0$. Es ist somit klar, dass die Wirkung auf der wahren Bahnkurve ein absolute Minimum besitzt, da für beliebiges $\Delta x(t)$ die Differenz ΔS positiv ist.

Für den Fall (ii) hat man entsprechend

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}(t)+\Delta\dot{x}(t)\right)^2 + mg(x(t)+\Delta x(t))\right] - \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}(t)\right)^2 + mgx(t)\right] \\
&= \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, m\dot{x}(t)\Delta\dot{x}(t) + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, mg\Delta x(t) + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2}\left(\Delta\dot{x}(t)\right)^2 \\
&= \left[m\dot{x}\Delta x\right]_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\ (mg - m\ddot{x})\,\Delta x dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2}\left(\Delta\dot{x}(t)\right)^2 \\
&= \frac{m}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \left(\Delta\dot{x}(t)\right)^2 > 0
\end{aligned}$$

wobei wieder partielle Integration benutzt wurde, $\Delta x(t_1) = \Delta x(t_2) = 0$ und die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = mg$.

(b) Für den Fall (iii), den Oszillator ergibt sich analog

$$\Delta S = \frac{m}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\Delta\dot{x}(t)\right)^2 - \omega^2\left(\Delta x(t)\right)^2\right].$$

Man sieht, dass es hier zwei positive (wegen der Quadrate) Ausdrücke gibt mit verschiedenem Vorzeichen. Um eine genauer Aussage machen können entwickeln wir nun $\Delta x(t)$ in einer orthogonalen Basis auf dem Raum $V = \{f \in C^1([t_1,t_2],\mathbb{R}) | f(t_1) = f(t_2) = 0\}$ (d.h. der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen, die an den Rändern Null sind, denn in eben diesem Raum liegen die Variationen $\Delta x(t)$). Eine orthogonale Basis dieses Raumes bilden die Funktionen

$$f_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{t_2 - t_1}(t - t_1)\right), n \in \mathbb{N}$$

Damit kann man also jede beliebige Variation mittels dieser Basisfunktionen entwickeln. (mit $\Delta x(t_1) = \Delta x(t_2) = 0$):

$$\Delta x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Man hat zudem

$$\Delta\dot{x}(t) = \frac{\pi}{t_2 - t_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n n \cos \pi n \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Einsetzen der Ausdrücke und Variablensubstitution $x = \frac{\pi}{t_2 - t_1}(t - t_1)$ führt auf

$$\Delta S = \frac{m}{2}\frac{t_2 - t_1}{\pi}\int_0^{\pi} dx \sum_{n,m} a_n a_m \left[\frac{(\pi n)(\pi m)}{(t_2 - t_1)^2}\cos(nx)\cos(mx) - \omega^2 \sin(nx)\sin(mx)\right].$$

Verwendet man nun die Orthogonalität, d.h.

$$\int_0^{\pi} dx \cos(nx)\cos(mx) = \int_0^{\pi} dx \sin(nx)\sin(mx) = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}$$

so ergibt sich schließlich

$$\Delta S = \frac{m}{4}(t_2 - t_1)\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\pi^2 n^2}{(t_2-t_1)^2} - \omega^2 \right).$$

Wann hat nun S ein absolutes Minimum (d.h. ist $\Delta S > 0$)? Dazu muss der Klammerausruck strickt positiv sein. Das ist der Fall, wenn

$$\frac{\pi n}{(t_2 - t_1)} > \omega \quad \Rightarrow \quad (t_2 - t_1) < \frac{\pi n}{\omega}.$$

Damit dies stets erfüllt ist muss also

$$(t_2 - t_1) < \frac{\pi}{\omega}$$

gelten. Man sieht daran, dass die Wirkung auf der genaue Bahnkurven nur für kurze Zeit $t_2 - t_1 < T/2$ (für die Periodendauer gilt $\omega = \frac{2\pi}{T}$) ein absolutes Minimum hat. Für Zeiten $t_2 - t_1 > T/2$ lassen sich sowohl Variationen finden, die $\Delta S > 0$ herbeiführen als auch Variationen, für die $\Delta S < 0$ gilt und man hat es somit mit einem Sattelpunkt zu tun.
Dieses Beispiel verdeutlicht nochmals den Sachverhalt, dass das "Prinzip der kleinsten Wirkung" nur lokal (in der Zeit) gilt und eigentlich Prinzip der stationären Wirkung heißen sollte. Zitat aus Landau, Band 1 (Mechanik) Fußnote Kapitel 2: "Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass das Prinzip der kleinsten Wirkung nicht immer für die Bahn im Ganzes gilt, sondern nur für jeden genügend kleinen Abschnitt; für die gesamte Bahn kann es sich zeigen, dass die Wirkung lediglich einen extremalen, aber nicht einen minimalen Wert annimmt. Dieser Umstand ist jedoch ganz unwesentlich bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen, welche nur die Extremalbedingung benutzt."

3. Prinzip der kleinsten Wirkung II (6 Punkte)

(a) Kugel im Schwerefeld in x-z-Ebene: Lagrange: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz$
Ansatz für die zu variierende Bahn in der Wirkung:

$$\begin{array}{rcl} x(t) &=& x_0 + v_x t + at^2 \\ z(t) &=& z_0 + v_z t + bt^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& v_x + 2at \\ \dot{z} &=& v_z + 2bt \end{array}$$

Das in die Lagrangefunktion einsetzen ergibt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left[\underbrace{(v_x^2 + v_z^2 - 2gz_0)}_{A_0} + \underbrace{(4v_x a + 4v_z b - 2gv_z)}_{A_1} t + \underbrace{(4a^2 + 4b^2 - 2gb)}_{A_2} t^2 \right]$$

Die Wirkung ist dann billigerweise:

$$\boxed{S = \int_0^T \mathrm{d}t\, \mathcal{L}(x, \dot{x}, z, \dot{z}) = \frac{1}{2}m\left[A_0\, T + A_1 \frac{T^2}{2} + A_2 \frac{T^3}{3} \right]}$$

(b) Endpunkte als Randbedingungen: $x(0) = z(0) = 0\,, x(T) = x_m\,, z(T) = 0$, daraus folgt für den Ansatz von oben:

$$\boxed{x_0 = z_0 = 0 \quad , \quad v_x = \frac{x_m}{T} - aT \quad , \quad v_z = -bT}$$

Jetzt sind nur noch a, b unbestimmt. Die Bahn in S wird also durch a, b festgelegt, und die Bahn in S zu variieren heißt jetzt, a und b zu variieren. S ist extremal, wenn diese Variation verschwindet, also $\dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \;,\; \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$. Man muß beim Ableiten beachten, daß v_x und v_z von a, b abhängen, d.h., erst v_x, v_z einsetzen, dann nach a oder b ableiten. Etwas eleganter: Kettenregel benutzen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} &= \frac{1}{2}m\left[(2v_x\frac{\partial v_x}{\partial a})T + (4v_x + 4a\frac{\partial v_x}{\partial a})\frac{T^2}{2} + (8a)\frac{T^3}{3}\right] \\
\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} &= \frac{1}{2}m\left[(2v_z\frac{\partial v_z}{\partial b})T + (4v_z + 4b\frac{\partial v_z}{\partial b} - 2g\frac{\partial v_z}{\partial b})\frac{T^2}{2} + (8b - 2g)\frac{T^3}{3}\right]
\end{aligned}$$

Einsetzen von $\dfrac{\partial v_x}{\partial a} = -T \;,\; \dfrac{\partial v_z}{\partial b} = -T$ und alles ausmultiplizieren und -addieren liefert

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{3}mT^3\,a \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{1}{3}mT^3\,(b + \frac{1}{2}g)$$

Nullsetzen liefert

$$a = 0 \quad , \quad b = -g/2$$

und die physikalische Bahn der Kugel lautet, mit $v_x = x_m/T \;,\; v_z = gT/2\,$,

$$\boxed{\begin{aligned}
x(t) &= v_x t = \frac{x_m}{T}t \\
z(t) &= v_z t - \frac{g}{2}t^2 = \frac{g}{2}(tT - t^2)
\end{aligned}}$$

Das so etwas herauskommt, war natürlich schon vorher klar: in x-Richtung: gleichförmige Bewegung, in z-Richtung: freier Fall, kennen wir schon aus Theorie A.

(c) Zum Vergleich der 'konventionelle' Weg: Die Bahn, die die Wirkung extremalisiert, wird ja durch die Lagrangegleichungen bestimmt, also:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_\alpha} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{z} &= -mg \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_x t \\ z(t) &= z_0 + v_z t - \frac{g}{2}t^2 \end{aligned}$$

Die Randbedingungen (Endpunkte für $t = 0$ und $t = T$) legen die Integrationskonstanten x_0, z_0, v_x, v_z fest, wie in b). Normalerweise hat man als Randbedingungen nicht die Endpunkte der Bahn, sondern die Anfangspunkte $x(0) = 0, z(0) = 0$ und die Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{x}(0) = v_x\,,\ \dot{z}(0) = v_z$. Das ist natürlich äquivalent und läßt sich umrechenen in die Wurfzeit T und -weite x_m:

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= v_x = x_m/T \\ \dot{z}(0) &= v_z = gT/2 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad T = \frac{2v_z}{g} \quad , \quad x_m = \frac{2}{g}v_x v_z$$