Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Theoretische Physik B SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 8
01.06.2010

---

1. Hamilton-Funktionen (8 Punkte)

Schreiben Sie für die folgenden Fälle die Hamilton-Funktion auf:

(i) harmonischer Oszillator (ein Teilchen im quadratischen Potenzial $U = m\omega^2 x^2/2$) (1 Punkt)

(ii) ein Massenpunkt auf einer Kugel (Blatt 3) (1 Punkt)

(iii) das Pendel mit beweglicher Aufhängung (Blatt 4) (2 Punkte)

(iv) das ebene Doppel-Pendel (Blatt 4) (2 Punkte)

(v) ein geladenes Teilchen (Ladung q, Masse m) (Blatt 6) (1 Punkt).

Finden sie dabei die jeweilige Lagrangefunktion in der entsprechenden Übungsaufgabe oder leiten sie diese her.

(vi) Betrachten Sie jetzt ein Teilchen mit der Hamilton-Funktion

$$H = cp, \quad c = const.$$

Kann man diese Bewegung mit einer Lagrange-Funktion beschreiben? (1 Punkt).

2. Harmonischer Oszillator und Poissonklammern I (8 Punkte)

Betrachten Sie die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators aus Aufgabe 1 (i).

(a) Führen sie die Koordinaten

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}}, \quad a^* = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}}.$$

ein und drücken sie die Hamiltonfunktion durch diese Koordinaten aus. (2 Punkte)

(b) Zeigen sie, dass für die Poissonklammer von a und a^* gilt

$$\{a, a^*\} = -i\,.$$

Beweisen sie dazu zuerst die in der Vorlesung hergeleiteten Relationen

$$\{x_n, x_m\} = \{p_n, p_m\} = 0 \quad \text{und} \quad \{x_n, p_m\} = \delta_{nm}$$

und verwenden sie diese dann. (3 Punkte)
Hinweis: Die Poissonklammer ist wie folgt definiert

$$\{f, g\} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} \right).$$

(c) Begründen sie, dass die Bewegungsgleichungen für $a(t)$ und $a^*(t)$ wie folgt gefunden werden können

$$\dot{a}(t) = \{a(t), H\} \quad \text{und} \quad \dot{a}^*(t) = \{a^*(t), H\}\,.$$

Geben sie die allgemeine Lösung dieser beiden Gleichungen an. (3 Punkte)
Hinweis: Verwenden sie die Relation $\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\}$.

3. Funktionaldeterminante (4 Punkte)

Betrachten sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) und ein Integral der Form

$$\int_V f(\vec{x})\, dV = \int_{V_x} f(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_n\,. \tag{1}$$

Bei der praktischen Anwendungen ist eine Integration über kartesische Koordinaten jedoch oft unvorteilhaft und man nimmt daher eine Koordinatentransformation zu neuen Koordinaten $(u_1, \ldots, u_n)$ vor. In diesem Falle hat man folgende Transformation vorzunehmen

$$\int_{V_x} f(\vec{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{V_u} f(\vec{u})\, |D_J|\; du_1 \cdots du_n\,.$$

Dabei bezeichnen $V_{\vec{x}}$ und $V_{\vec{u}}$ die zu integrierenden Volumina in den Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $(u_1, \ldots, u_n)$. Weiter bezeichnet $|D_J|$ die sogenannte Funktionaldeterminante, d.h. die Determinante der Jakobi-Matrix

$$|D_J| = \left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}\right|\,.$$

(a) Betrachten sie für $n = 2$ den Übergang von kartesischen (x, y) zu Polarkoordinaten (r, ϕ) und für $n = 3$ den Übergang von kartesischen (x, y, z) zu Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ)

$$\begin{aligned} \text{Polarkoordinaten} \;&:\; x = r\cos(\phi), \quad y = r\sin(\phi) \\ \text{Kugelkoordinaten} \;&:\; x = r\sin(\theta)\cos(\phi), \quad y = r\sin(\theta)\sin(\phi), \quad z = r\cos(\theta)\,. \end{aligned}$$

Bestimmen sie für beide Fälle die Determinante der Jakobi-Matrix $|D_J|$. (2 Punkte)

(b) Betrachten sie für $n = 3$ das Volumen $V_{\vec{x}} = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Benutzen sie geeignete Koordinaten, bestimmen sie das zugehörige Volumen $V_{\vec{u}}$ und berechnen sie das Integral Gl. (1) für die beiden Funktionen

$$f(x, y, z) = 1 \qquad \text{und} \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2\,.$$

(2 Punkte)