Theoretische Physik B SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 9
08.06.2010

1. Drehimpuls (4 Punkte)

Schreiben Sie das Betragsquadrat M^2 und die z -Projektion M_z des Drehimpulses $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ mittels kanonischer Variablen in sphärischen Koordinaten. Hängen die Ergebnisse von der radialen Koordinate ab?

Hinweis: Drücken sie $\vec{r}$ und $\vec{p}$ in Kugelkoordinaten aus um $\vec{M}(r, \theta, \phi)$ und damit M^2 und M_z zu finden. Diese Ausdrücke drücken sie wiederum durch die kanonischen Impulse p_r, p_θ, p_ϕ aus, welche sie z.B. mittels der Lagrangefunktion eines freien Massepunktes in Kugelkoordinaten finden können.

2. Poisson-Klammern II (7 Punkte)

(a) Berechnen sie folgende Poisson-Klammern (in kartesischen Koordinaten)

$$\{\vec{p}, U(\vec{r})\}, \quad \{\vec{r}, f(\vec{p})\}.$$

(2 Punkte)

(b) Berechnen sie die Poisson-Klammern (in kartesischen Koordinaten)

$$\{f_i, M_k\},$$

für die folgenden f_i

$$(a) f_i = x_i, \quad (b) f_i = p_i, \quad (c) f_i = M_i.$$

Dabei bezeichnet M_i die i -te Komponente des Drehimpulses. Zeigen Sie, dass sich alle Ergebnisse in der Form

$$\{f_i, M_k\} = - \sum_l \epsilon_{ikl} f_l.$$

zusammenfassen lassen. Hierin bezeichnet ϵ_{ijk} den Levi-Civita-Tensor

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ -1 & (i, j, k) = \{(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(3 Punkte)

(c) Zeigen sie, dass die folgenden Poissonklammern alle identisch Null sind

$$\{M_i, r^2\}, \quad \{M_i, p^2\}, \quad \{M_i, \vec{p}\vec{r}\}, \quad \{M_i, M^2\}.$$

(2 Punkte)

3. Erhaltungsgrößen

(3 Punkte)

Betrachten Sie zwei Fälle, bei denen ein physikalisches System die folgenden Erhaltungsgrößen besitzen soll

- (a) p_x und M_z
- (b) M_x und M_z .

Können Sie weitere Erhaltungsgrößen für jeden dieser beiden Fälle finden?

4. Kanonische Transformation

(3 Punkte)

Betrachten Sie die folgende kanonische Transformation

$$\vec{P} = \vec{p}, \quad \vec{Q} = \vec{q} - \vec{p}t/m.$$

Finden sie nun die Hamilton-Funktion H' in den transformierten Koordinaten für ein freies Teilchen. Interpretieren sie das Ergebnis.

5. Phasenraum

(3 Punkte)

- (a) Zeigen sie, dass die Trajektorien eines harmonischen Oszillators (Massepunkt der Masse m im Potential $U = m\omega^2 x^2/2$) stets Ellipsen sind. (1 Punkt)
- (b) Betrachten sie nun die Trajektorien eines mathematischen Pendels (Massepunkt der Masse m im Potential $U = -mgl \cos(\phi)$) im Phasenraum. Unterscheiden sie dabei die Fälle $E < mgl$ und $E > mgl$ und skizzieren sie die jeweiligen Trajektorien. (2 Punkte)