

Theoretische Physik B - Lösungen SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 9
08.06.2010

1. Drehimpuls (4 Punkte)

$$M^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}$$

$$M_z = p_\varphi$$

2. Poisson Klammern II (7 Punkte)

(a)

$$\{\vec{p}, U(\vec{r})\} = \nabla U(\vec{r})$$

$$\{\vec{r}, f(\vec{p})\} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}$$

(b) Benutzen Sie

$$M_i = \epsilon_{ikl} x_k p_l$$

$$\{h, fg\} = \{h, f\}g + \{h, g\}f$$

Z.B.

$$\{x_i, M_k\} = \epsilon_{klm} (\{x_i, x_l\} p_m + \{x_i, p_m\} x_l) = -\epsilon_{ikl} x_l$$

(c) Auch hier muss man die obige Gleichungen benutzen

3. Erhaltungsgrößen (3 Punkte)

Die Erhaltungsgrößen sind

(a) $p_y = \{p_x, M_z\}$

(b) M_y und M^2 .

4. Kanonische Transformation (3 Punkte)

Das Ergebnis ist

$$H' = 0.$$

Das heisst

$$\dot{P} = \dot{Q} = 0,$$

weil P und Q Anfangsbedingungen für die freie Bewegung sind.

5. Phasenraum

(3 Punkte)

(a) Die Lösung für harmonischer Oszillator;

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Dann:

$$p = m\dot{x}(t) = m\omega A \cos(\omega t + \varphi).$$

Die Trajektorie ist dann ein Ellips

$$\frac{p^2}{m^2\omega^2} + x^2 = A^2.$$

(b) Es gilt

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mgl \cos \phi$$

und

$$H = E = \frac{p_\phi^2}{2ml^2} - mgl \cos \phi.$$

Damit

$$p_\phi = \pm \sqrt{2ml^2 \sqrt{E + mgl \cos(\phi)}}$$

Für $E < mgl$ schwingt das Pendel. Die Phasenbahnen sind geschlossene Kurven, die

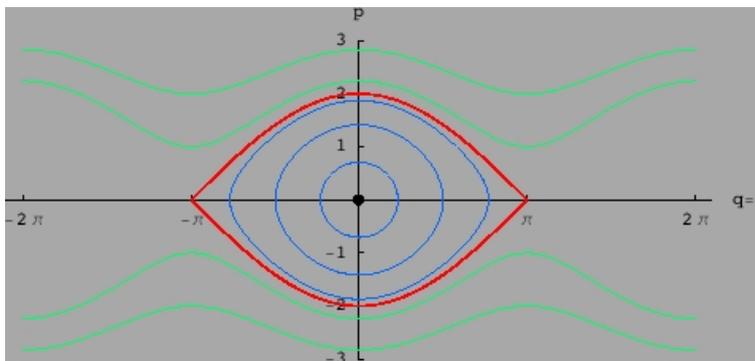


Abbildung 1: Phasenraumdiagramm des mathematischen Pendels

vom Phasepunkt in der angegebenen Richtung durchlaufen werden (blaue Kurven in Abb. 1). Für $E = mgl$ reicht der mögliche Variationsbereich der Lagekoordinate ϕ von der Vertikalen ($\phi = \pm\pi$) bis wieder zur Vertikalen. Die Schwingungsdauer ist aber unendlich. Deswegen durchläuft der Phasenpunkt in Abb. 5b (rote Kurve) nur einen Teil des oberen oder des unteren Asts der durch π und $-\pi$ gehenden Phasenbahn. Diese Limitationsbewegung trennt die Schwingungen von den Rotationen des Pendels, die für $E > mgl$ eintreten. Letzteren entsprechen die wellenförmigen Kurven ausserhalb der Separatrix im Phasenraumdiagramm, Abb. 1 (grüne Kurven).