

Theoretische Physik B SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 10
22.06.2010

1. Hauptachsentransformation

(4 Punkte)

Betrachten sie die folgende Kurve zweiter Ordnung

$$4x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6 = 0. \quad (1)$$

(a) Bringen sie Gl. (1) auf die Form

$$\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} = C$$

mit $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$, einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ und einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. (1 Punkt)

(b) Nach Sätzen der linearen Algebra gibt es zu jeder symmetrischen Matrix A eine *orthogonale* Matrix S mit der Eigenschaft

$$S^T \cdot A \cdot S = D$$

wobei D eine Diagonalmatrix bezeichnet, welche die Eigenwerte von A enthält (aufgrund der Symmetrie von A sind diese stets reell). Seien nun α_1, α_2 die zu bestimmenden Eigenwerte von A . Die Matrix S enthält die normierten Eigenvektoren von A als Spalten. Führen sie nun die Variablentransformation $\vec{x} = S\vec{y}$ ein und zeigen sie, dass die Gl. (1) in den Koordinaten y_1, y_2 wie folgt lautet.

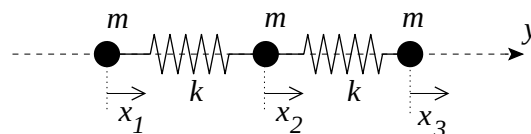
$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 = C.$$

Bestimmen sie zudem explizit die Transformationsmatrix S . Interpretieren sie die durchgeführte Rechnung geometrisch. (3 Punkte)

2. Dreiatomiges lineares Molekül

(8 Punkte)

Als einfaches Model für ein dreiatomiges Molekül betrachten wir drei identische Massen m , die über zwei Federn der Federkonstante k miteinander verbunden sind. Wir wollen im folgenden nur die Bewegung entlang der Molekülachse in Betracht ziehen. Die Auslenkungen aus den jeweiligen Ruhelagen werden mit x_i ($i = 1, 2, 3$) bezeichnet.



- (a) Geben sie die Lagrangefunktion $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$ mit $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ dieses Systems an und bringen sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform

$$M\ddot{\vec{x}} + V\vec{x} = 0 \quad (2)$$

mit zwei zu bestimmenden symmetrischen Matrizen $M, V \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Ist die Matrix V positiv definit? (3 Punkte)

- (b) Gehen sie nun mit dem Ansatz $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ in Gl. (2) ein und zeigen sie, dass dies auf die Eigenwertgleichung

$$(V - \omega^2 M)\vec{x}_0 = 0$$

führt. Bestimmen sie die drei Eigenfrequenzen ω_i^2 und zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_{i,0}$ ($i = 1, 2, 3$). Geben sie die allgemeine (reelle!) Lösung an und diskutieren sie auch die einzelnen Eigenmoden. Wieso ist eine davon keine Schwingung? (3 Punkte)
Hinweis: Die Eigenvektoren $\vec{x}_{i,0}$ können sie stets reell wählen. Ein partikuläre Lösung (Eigenmode) ist dann durch $\vec{x}_i(t) = \vec{x}_{i,0} C_i e^{-i\omega_i t}$ gegeben mit einer komplexen Zahl C_i . Die allgemeine Lösung ergibt sich dann aus $x(t) = \text{Re}(\sum_i \vec{x}_i(t))$ und sollte 6 Konstanten enthalten (wieso?).

- (c) Bestimmen die mithilfe der allgemeinen Lösung die spezielle Lösung mit den Anfangsbedingungen $\vec{x}(t=0) = (0, 0, 1)^T$ und $\dot{\vec{x}}(t=0) = (0, 0, 0)^T$. (2 Punkte)

3. Ebenes Doppelpendel (8 Punkte)

Betrachten sie nochmals das ebene Doppelpendel (Blatt 4, Aufgabe 2), mit der Lagrangefunktion $L = T - U$, wobei

$$\begin{aligned} T &= \frac{M l^2}{2} \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2 l^2}{2} \dot{\phi}_2^2 + m_2 l^2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \\ U &= -M g l \cos(\phi_1) - m_2 g l \cos(\phi_2) \end{aligned}$$

und der Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$.

- (a) Entwickeln sie nun das Potential U analog zur Vorlesung bis zur quadratischen Ordnung in ϕ_1, ϕ_2 unter Vernachlässigung des konstanten Termes. Setzen sie zudem für eventuell koordinatenabhängige Massefaktoren in der quadratischen Form der kinetischen Energie ($T = \sum_{ik} m_{ik}(q_i) \dot{q}_i \dot{q}_k$) die Gleichgewichtspositionen $q_{i,0}$ ein. Bringen sie L damit auf die Form

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{\vec{\phi}}^T M \dot{\vec{\phi}} - \vec{\phi}^T V \vec{\phi} \right)$$

mit den beiden zu bestimmenden symmetrischen Matrizen $M, V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Ist V positiv definit? (4 Punkte)

- (b) Zeigen sie nun wieder, dass die Bewegungsgleichung

$$M\ddot{\vec{\phi}}(t) + V\vec{\phi}(t) = 0$$

lautet und der Ansatz $\vec{\phi}(t) = \vec{\phi}_0 e^{-i\omega t}$ auf die Eigenwertgleichung

$$(V - \omega^2 M)\vec{\phi}_0 = 0$$

führt. Beschränken sie sich nun auf den Fall $m_1 = m_2 = m$ und bestimmen (und diskutieren) sie die beiden Eigenmoden, d.h. die Eigenwerte ω_i^2 und zugehörigen Eigenvektoren $\vec{\phi}_{0,i}$ ($i = 1, 2$). Normieren sie die Eigenvektoren so, dass

$$S^T M S = E$$

gilt, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet und $S^T = (\vec{\phi}_{0,1}, \vec{\phi}_{0,2})$ die Matrix bezeichnet, welche die Eigenvektoren $\vec{\phi}_{0,i}$ als Spalten enthält. (4 Punkte)