

Theoretische Physik B - Lösungen SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 10
22.06.2010

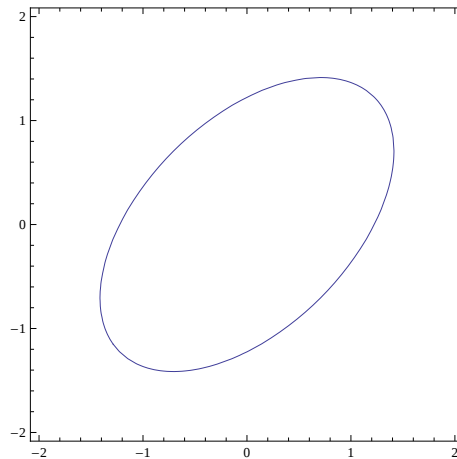
1. Hauptachsentransformation

(4 Punkte)

(a) Hier gilt

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = 6.$$

Die Punkte in der $x_1 - x_2$ Ebene, die diese Gleichung erfüllen bilden eine “gedrehte” Ellipse (siehe Abbildung).



(b) Die Matrix A hat die Eigenwerte 2 und 6 mit den zugehörigen Eigenvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$. Damit lautet die Matrix S

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$S^T A S = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Da für eine orthogonale Matrix $S^{-1} = S^T$ gilt können wir die angegebene Relation wie folgt umkehren

$$\vec{x} = S \vec{y} \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = S^T \vec{x}.$$

Damit lässt sich schreiben ($S^T S = S S^T = 1$)

$$\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{x}^T S S^T A S S^T \vec{x} = \vec{x}^T S D S^T \vec{x} = \vec{y}^T D \vec{y} = 2y_1^2 + 6y_2^2 = 6$$

was einer Ellipsengleichung entspricht. Damit ist die geometrische Interpretation folgende: Man wählt das neue Koordinatensystem (d.h. die y_1, y_2 Koordinaten) so, dass die Achsen der Ellipse entlang der Richtung der y_1, y_2 -Koordinatenachsen zeigen. Speziell in diesem Falle entspricht dies einer Drehung um $\pi/4$.

2. Dreiatomiges lineares Molekül

(8 Punkte)

(a) Die Langrangefunktion dieses Systems ist gegeben durch

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{k}{2} [(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2] .$$

Dies lässt sich auch schreiben als

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{\vec{x}}^T M \dot{\vec{x}} - \vec{x}^T V \vec{x} \right) = \frac{1}{2} \sum_{ij} [M_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j]$$

mit den beiden (symmetrischen) Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} .$$

Die Bewegungsgleichungen für ein l ($l = 1, 2, 3$) lauten mit $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} - \frac{\partial L}{\partial x_l} = 0$

$$\sum_i [M_{li} \ddot{x}_i + V_{li} x_i] = 0 .$$

Dies ergibt als Vektor zusammengefasst

$$M \ddot{\vec{x}} + V \vec{x} = 0 .$$

Die Matrix V ist *nicht* positiv definit, denn für den Vektor $a = (1, 1, 1)^T$ gilt $a^T V a = 0$ (siehe unten für weitere Diskussion).

(b) Der Ansatz $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ führt mit $\ddot{\vec{x}}(t) = -\omega^2 \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ auf

$$-M\omega^2 \vec{x}_0 e^{-i\omega t} + V \vec{x}_0 e^{-i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \quad (V - \omega^2 M) \vec{x}_0 = 0 .$$

Damit diese Gleichung nichttriviale Lösungen besitzt muss $\det(V - \omega^2 M) = 0$ gelten, also

$$0 = \left| \begin{pmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 m & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{pmatrix} \right| .$$

Eine Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= (k - \omega^2 m)^2 (2k - \omega^2 m) - k^2 (k - \omega^2 m) - k^2 (k - \omega^2 m) \\ &= (k - \omega^2 m) [(k - \omega^2 m)(2k - \omega^2 m) - 2k^2] \\ &= (k - \omega^2 m) [m^2 \omega^4 - 3k\omega^2 m] \\ &= (k - \omega^2 m) m \omega^2 (3k - \omega^2 m) \end{aligned}$$

Damit lauten die Lösungen

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_3^2 = \frac{3k}{m} .$$

Die zugehörigen Eigenvektoren finden sich als

$$\vec{x}_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_{2,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_{3,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Zunächst zur Lösung mit $\omega_1^2 = 0$. In Normalkoordinaten würde die entsprechende Gleichung lauten

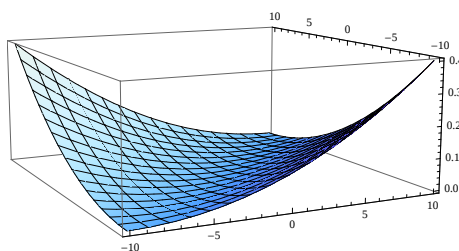
$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi = \ddot{\xi}_1 = 0$$

und damit ist die Lösung gegeben durch

$$\vec{x}_1(t) = \vec{x}_{1,0}(\beta_1 t + \alpha_1),$$

was einer gleichförmigen Bewegung des gesamten Moleküles entspricht. Dies ist möglich, da für uniforme Auslenkung $x_1 = x_2 = x_3$ das Potential $V(x_1, x_2, x_3)$ stets gleich Null ist und dort somit keine Rückstellkraft wirkt.

(Ganz gut veranschaulichen lässt sich das im Fall von nur einer Feder, die mit zwei Massen verbunden ist. In diesem Fall ist das Potential $V(x_1, x_2) = \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2$ (siehe Abb.). Hier ist sehr gut ersichtlich, dass für $x_1 = x_2$ (d.h. entlang der



Winkelhalbierenden in der $x - y$ -Ebene das Potential stets Null ist.) Das Potential besitzt also entlang dieser Linie kein absolutes Minimum, d.h. die Hesse-Matrix, welches ja gerade der Matrix V entspricht ist nicht positiv definit (sondern positiv semi-definit).

Schreibt man für die übrigen beiden Lösungen $C_i = |C_i|e^{-i\phi_i}$ mit reellem ϕ_i so ergibt sich für die allgemeine Lösung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\beta_1 t + \alpha_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \beta_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \beta_3 \cos(\omega_3 t + \alpha_3)$$

mit den sechs reellen Konstanten α_i, β_i ($i = 1, 2, 3$). Es sind sechs Konstanten, da wir es mit drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu tun haben.

(c) Die beiden Randbedingungen führen auf die Gleichungen

$$\alpha_1 + \beta_2 \cos(\alpha_2) + \beta_3 \cos(\alpha_3) = 0 \quad (1)$$

$$\alpha_1 - 2\beta_3 \cos(\alpha_3) = 0 \quad (2)$$

$$\alpha_1 - \beta_2 \cos(\alpha_2) + \beta_3 \cos(\alpha_3) = 1 \quad (3)$$

$$\beta_1 - \beta_2 \omega_2 \sin(\alpha_2) - \beta_3 \omega_3 \sin(\alpha_3) = 0 \quad (4)$$

$$\beta_1 + 2\beta_3 \omega_3 \sin(\alpha_3) = 0 \quad (5)$$

$$\beta_1 + \beta_2 \omega_2 \sin(\alpha_2) - \beta_3 \omega_3 \sin(\alpha_3) = 0 \quad (6)$$

z.B. führt Addition von (1) und (3) und dann Addition der resultierenden Gleichung mit (2) auf $\alpha_1 = 1/3$. Ebenso führt Addition von (4) und (6) und dann Addition der resultierenden Gleichung mit (5) auf $\beta_1 = 0$. Insgesamt ergibt sich hier:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_3 = \frac{1}{6}$$

3. Ebenes Doppelpendel

(8 Punkte)

- (a) Wir beginnen mit der kinetischen Energie. Die Gleichgewichtspositionen sind $\phi_1 = \phi_2 = 0$ und somit

$$T = \frac{M l^2}{2} \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2 l^2}{2} \dot{\phi}_2^2 + m_2 l^2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 = \frac{1}{2} \dot{\vec{\phi}}^T M \dot{\vec{\phi}}$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} M l^2 & m_2 l^2 \\ m_2 l^2 & m_2 l^2 \end{pmatrix}.$$

Für das Potential benutzen wir $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Unter Vernachlässigung des konstanten Terms (irrelevant in einem Potentialausdruck) erhält man

$$U = \frac{1}{2} (M g l \phi_1^2 + m_2 g l \phi_2^2) = \frac{1}{2} \vec{\phi}^T V \vec{\phi}$$

mit

$$V = \begin{pmatrix} M g l & 0 \\ 0 & m_2 g l \end{pmatrix}.$$

In diesem Falle ist V positiv definit, da für beliebige $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ (mit $\vec{a} \neq 0$) gilt: $\vec{a}^T V \vec{a} = M g l a_1^2 + m_2 g l a_2^2 > 0$.

- (b) Wie schon oben gezeigt erhält man die gewünschte Bewegungsgleichung und die Bestimmungsgleichung der ω_i^2 . Es muss hier also gelten

$$\left| \begin{pmatrix} 2ml(g - \omega^2 l) & -\omega^2 m l^2 \\ -\omega^2 m l^2 & ml(g - \omega^2 l) \end{pmatrix} \right| = 2m^2 l^2 (g - \omega^2 l)^2 - \omega^4 m^2 l^4 = 0,$$

also

$$(g - \omega^2 l)^2 = \frac{1}{2} \omega^4 l^2 \quad \Rightarrow \quad |g - \omega^2 l| = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega^2 l \quad \Rightarrow \quad \pm \left(\frac{g}{l} - \omega^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega^2.$$

Damit folgt schliesslich ($\omega_0^2 = g/l$)

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_0^2}{1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Dies kann man direkt mit Aufgabe 3 von Blatt 4 vergleichen. Die zugehörigen Eigenvektoren sind gegeben durch

$$\vec{\phi}_{0,1} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_{0,2} = c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies hat folgende Interpretation: Die erste Eigenvektor korrespondiert zu einer Bewegung der beiden Massepunkte in gegensinniger Richtung, wobei der zweite Eigenvektor eine Bewegung der beiden Massepunkte in gleichsinniger Richtung beschreibt. Es gilt nun

$$S^T M S = 2m l^2 \begin{pmatrix} (1 - 1/\sqrt{2})c_1^2 & 0 \\ 0 & (1 + 1/\sqrt{2})c_2^2 \end{pmatrix}$$

und damit gilt

$$c_1^2 = \frac{1}{2m l^2 (1 - 1/\sqrt{2})} \quad c_2^2 = \frac{1}{2m l^2 (1 + 1/\sqrt{2})}$$