Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Theoretische Physik B   SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 11
29.06.2010

---

1. Trägheitstensor, Hauptachsen und Steiner'scher Satz (6 Punkte)

In der Vorlesung haben sie den Trägheitstensor I_{ik} eines starren Körpers kennengelernt, der in der diskreten Fassung in einem gegebenen Koordinatensystem mit Basisvektoren $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ wie folgt gegeben ist

$$I_{ik} = \sum_l m_l \left(\vec{x}_l^2 \delta_{ik} - (x_i)_l (x_k)_l \right) .$$

Die Summe erstreckt sich dabei über alle Massepunkte.

(a) Zeigen sie, dass der Trägheitstensor symmetrisch ist, d.h. dass gilt

$$I_{ik} = I_{ki} .$$

(1 Punkt)

(b) Schreiben sie die Matrix I explizit aus. (1 Punkt)

(c) Da die Matrix I symmetrisch ist, lässt sie sich mittels einer Hauptachsentransformation diagonalisieren, d.h. es gibt eine orthogonale Matrix A mit der Eigenschaft

$$I' = A^T I A = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$$

wobei $\mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ die Diagonalmatrix bezeichnet, welche die sogenannten *Hauptträgheitsmomente* $I_i (i = 1, 2, 3)$ auf der Diagonalen hat (diese entsprechen den Eigenwerten der Matrix I). Die Matrix A besteht aus den zugehörigen normierten Eigenvektoren $\vec{e}_i{}'$ als Spalten, welche den sogenannten *Hauptachsen* entsprechen. Welche Gestalt hat I in dem neuen Koordinatensystem mit Basisvektoren $\vec{e}_i{}'$? Zeigen sie, dass gilt

$$I_i + I_j \geq I_k \qquad i \neq j \neq k = 1, 2, 3 .$$

(1 Punkt)

(d) Zeigen sie, dass gilt

$$\mathrm{Spur}\,(I) = \mathrm{Spur}\,(I') .$$

(1 Punkt)

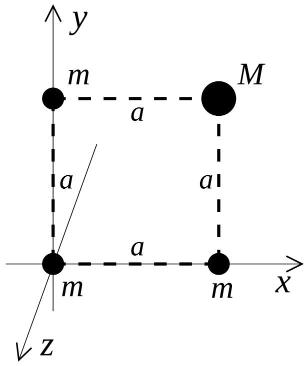
(e) Beweisen sie den Steiner'schen Satz: Sei ein Trägheitstensor I_{ik} in einem körperfesten Koordinatensystem gegeben, dessen Ursprung gleich dem Schwerpunkt ist. Der Trägheitstensor $\tilde{I}_{ik}$ in einem um einen konstanten Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ verschobenen Koordinatensystem ist dann gegeben durch

$$\tilde{I}_{ik} = I_{ik} + M(\vec{a}^2 \delta_{ik} - a_i a_k) .$$

Hier bezeichnet M die Gesamtmasse des starren Körpers ($M = \sum_i m_i$). (2 Punkt)

2. Trägheitstensor einer diskreten Massepunkteverteilung (8 Punkte)

Betrachten sie die unten abgebildete Anordnung von Punktmassen $m \neq M$ in der x-y-Ebene. Die masselosen starren Verbindungsstangen haben die Länge a.



(a) Man berechne die Komponenten $\tilde{I}_{ik}$ des Trägheitstensors bezüglich des *Ursprungs*. (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte $\tilde{I}_1\,, \tilde{I}_2\,, \tilde{I}_3$ und die zugehörigen Eigenvektoren (Hauptachsen) $\vec{e}_1{}'\,, \vec{e}_2{}'\,, \vec{e}_3{}'$ der Matrix $\tilde{I}$. Die Eigenvektoren sollen normiert sein, $|\vec{e}_i{}'| = 1$. Skizzieren Sie die $\vec{e}_i{}'$. (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix A, welche die Koordinatenachsen $\vec{e}_1 = (1,0,0)\,, \vec{e}_2 = (0,1,0)\,, \vec{e}_3 = (0,0,1)$ in die Eigenbasis transformiert, $\vec{e}_i{}' = A\vec{e}_i\,, i = 1,2,3$ und zeigen sie die Orthogonalität von A. Geben Sie die Komponenten $\tilde{I}_{ik}'$ bzgl. der Basis $\vec{e}_i{}'$ an.
(2 Punkte)

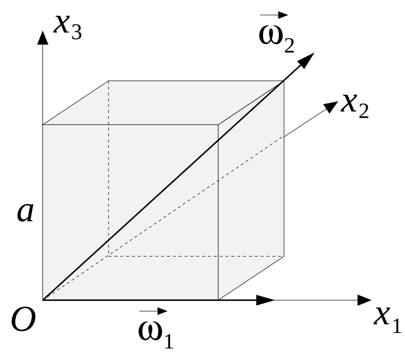
(d) Gewinnen Sie über den Satz von Steiner die Hauptträgheitsmomente $I_1\,, I_2\,, I_3$ bezüglich des Schwerpunktes des Körpers, für den Fall $M = m$. (2 Punkte)

3. Trägheitstensor einer kontinuierlichen Masseverteilung (8 Punkte)

In der Vorlesung wurde die folgende Gleichung für den Trägheitstensor einer Massendichte $\rho(\vec{x})$ hergeleitet:

$$I_{ik} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) \left[\delta_{ik}\, \vec{x}^2 - x_i\, x_k\right] d^3x.$$

Betrachten Sie einen Würfel mit Masse m und Kantenlänge a, der um seine Ecke O rotiert (siehe Skizze). Die Massenverteilung sei homogen innerhalb des Würfels.



(a) Geben Sie die Massendichte $\rho(\vec{x})$ des Würfels an. (1 Punkt)

(b) Berechnen Sie den Trägheitstensor I des Würfels.
(2,5 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente I_i des Würfels und geben Sie die zugehörigen Hauptträgheitsachsen $\vec{e}_i{}'$ an. (2,5 Punkte)

In der Vorlesung werden sie lernen, dass folgende Relation zwischen dem Drehimpuls $\vec{L}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ besteht

$$\vec{L} = I\vec{\omega}\,.$$

(e) Der Würfel rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_1$ um die x_1-Achse (siehe Skizze). Bestimmen Sie den Drehimpuls $\vec{L}_{\text{rot}}$ des Würfels. Sind Drehimpuls und Rotationsachse parallel zueinander? (1 Punkt)

(f) Der Würfel rotiere nun mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_2$ um seine Hauptdiagonale (siehe Skizze). Bestimmen Sie den Drehimpuls $\vec{L}_{\text{rot}}$ des Würfels. Sind Drehimpuls und Rotationsachse parallel zueinander? Was ist der Unterschied zu (e)? (1 Punkt)