

Theoretische Physik B - Lösungen SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 11
29.06.2010

1. Trägheitstensor, Hauptachsen und Steiner'scher Satz

(6 Punkte)

(a) Trivial ☺

(b) Es gilt mit $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

$$I = \begin{pmatrix} \sum_l m_l (y_l^2 + z_l^2) & -\sum_l m_l x_l y_l & -\sum_l m_l x_l z_l \\ -\sum_l m_l x_l y_l & \sum_l m_l (x_l^2 + z_l^2) & -\sum_l m_l y_l z_l \\ -\sum_l m_l x_l z_l & -\sum_l m_l y_l z_l & \sum_l m_l (x_l^2 + y_l^2) \end{pmatrix}$$

(c) Es gilt hier

$$\begin{aligned} I' &= \begin{pmatrix} \sum_l m_l ((y'_l)^2 + (z'_l)^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_l m_l ((x'_l)^2 + (z'_l)^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_l m_l ((x'_l)^2 + (y'_l)^2) \end{pmatrix} \\ &= \text{diag}(I_1, I_2, I_3) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$I_1 + I_2 = \sum_l m_l ((x'_l)^2 + (y'_l)^2 + 2(z'_l)^2) \geq \sum_l m_l ((x'_l)^2 + (y'_l)^2) = I_3.$$

Die anderen Komponenten zeigt man analog.

(d) Mit $I' = A^T I A$ gilt (zyklische Vertauschung unter der Spur ist erlaubt und $A^T A = A A^T = 1$):

$$\text{Spur}(I') = \text{Spur}(A^T I A) = \text{Spur}(I A A^T) = \text{Spur}(I)$$

(e) Wir setzen $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{a}$. Setzt man dies ein und verwendet, dass gilt $\sum_l m_l \vec{x}_l = 0$ bzw. $\sum_l m_l (x_i)_l = 0$ (jede Komponente des Schwerpunktes verschwindet) so folgt

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{ik} &= \sum_l m_l ((\vec{x}')_l^2 \delta_{ik} - (x'_i)_l (x'_k)_l) \\ &= \sum_l m_l ((\vec{x}_l - \vec{a})^2 \delta_{ik} - ((x_i)_l - a_i)((x_k)_l - a_k)) \\ &= \sum_l m_l (\vec{x}_l^2 \delta_{ik} - (x_i)_l (x_k)_l) + \left(\sum_l m_l \right) (\vec{a}^2 \delta_{ik} - a_i a_k) \\ &= I_{ik} + M(\vec{a}^2 \delta_{ik} - a_i a_k) \end{aligned}$$

2. Trägheitstensor einer diskreten Massepunktevorteilung

(8 Punkte)

(a) Trägheitstensor für N Massepunkte: $\tilde{I}_{ij} = \sum_{n=1}^N m_n [(\mathbf{r}^n)^2 \delta_{i,j} - x_i^n x_j^n]$

Diagonalelemente: $\tilde{I}_{ii} = \sum_{n=1}^N m_n [(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2 + (x_3^n)^2 - (x_i^n)^2]$

Außerdiagonalelemente: $\tilde{I}_{ij}|_{i \neq j} = - \sum_{n=1}^N m_n [x_i^n x_j^n]$

Hier:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{I}_{xx} &= (m+M)a^2 \\ \tilde{I}_{yy} &= (m+M)a^2 \\ \tilde{I}_{zz} &= 2(m+M)a^2 \\ \tilde{I}_{xy} &= I_{yx} = -Ma^2 \\ \tilde{I}_{xz} &= I_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{I} = \begin{pmatrix} (m+M)a^2 & -Ma^2 & 0 \\ -Ma^2 & (m+M)a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(m+M)a^2 \end{pmatrix}$$

(b) Eigenvektoren: $\tilde{I} \mathbf{e}'_i = \tilde{I}_i \mathbf{e}'_i \Rightarrow (\tilde{I} - \tilde{I}_i \mathbf{1}) \mathbf{e}'_i = 0$

Eigenwerte:

$$\det(\tilde{I} - \tilde{I}_i \mathbf{1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (2(m+M)a^2 - \tilde{I}_i) [((m+M)a^2 - \tilde{I}_i)^2 - (Ma^2)^2] = 0$$

daraus folgt

$$\boxed{\tilde{I}_3 = 2(m+M)a^2} \quad \text{und} \quad ((m+M)a^2 - \tilde{I}_i)^2 - (Ma^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{I}_1 = ma^2, \quad \tilde{I}_2 = (m+2M)a^2}$$

Zugehöriger Eigenvektor: $\tilde{I}_3 = 2(m+M)a^2 \Rightarrow$

$$\text{Mit } \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} : \left. \begin{aligned} -(m+M)b_x - Mb_y &= 0 \\ -Mb_x - (m+M)b_y &= 0 \\ 0b_z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b_x &= b_y = 0 \\ b_z &= \text{beliebig} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{e}'_3 = c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der freien Konstante $c_3 \equiv b_z$.

Zugehöriger Eigenvektor: $\tilde{I}_1 = ma^2 \Rightarrow$

$$\text{Mit } \mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} : \left. \begin{aligned} Mb_x - Mb_y &= 0 \\ -Mb_x + Mb_y &= 0 \\ (m+2M)b_z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b_x &= b_y \\ b_z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{e}'_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der freien Konstante $c_1 \equiv b_y$.

Zugehöriger Eigenvektor: $\tilde{I}_2 = (m+2M)a^2 \Rightarrow$

$$\text{Mit } \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} : \left. \begin{aligned} -Mb_x - Mb_y &= 0 \\ -Mb_x - Mb_y &= 0 \\ mb_z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b_x &= -b_y \\ b_z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{e}'_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der freien Konstante $c_2 \equiv b_y$.

Die Konstanten c_i werden jetzt so bestimmt, daß die Eigenvektoren normiert sind (Einheitsvektoren), $|\mathbf{e}'_i| = 1$, und es ergibt sich schließlich

$$\boxed{\begin{array}{lll} \tilde{I}_1 & = & ma^2 \\ \mathbf{e}'_1 & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{lll} \tilde{I}_2 & = & (m+2M)a^2 \\ \mathbf{e}'_2 & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{lll} \tilde{I}_3 & = & (2m+2M)a^2 \\ \mathbf{e}'_3 & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

Die Benennung der I_i und zugehörigen $\mathbf{e}'_i$ (welcher also der 1., 2., oder 3. Eigenvektor sein soll) ist natürlich willkürlich. Mit der hier benutzten Benennung bilden die Hauptachsen in der Reihenfolge $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ ein rechtshändiges Bezugssystem. Siehe auch die nichtvorhandene Skizze.

(c) Die Transformationsmatrix in $\mathbf{e}'_i = A \mathbf{e}_i$ lautet

$$\boxed{A = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Die Matrix ist orthogonal, denn die Spalten sind paarweise orthogonal (sogar orthonormal), $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = \delta_{i,j}$.

Die Komponenten $\tilde{I}'_{ij}$ des Trägheitstensors in der neuen Basis sind

$$\tilde{I}'_{ij} = (A^{-1} I A)_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}_3 \end{pmatrix}_{ij}$$

Die Matrix I wird durch die Ähnlichkeitstransformation Λ ja gerade diagonalisiert. Davon kann man sich notfalls durch Ausmultiplizieren von $\tilde{I}' = A^{-1} \tilde{I} A$ überzeugen.

(d) Schwerpunkt im "alten" Koordinatensystem:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_n m_n \mathbf{r}_n}{\sum_n m_n} = \frac{1}{3m+M} \left[ma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + ma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Ma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{(m+M)a}{3m+M} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \mathbf{e}'_1$$

Wenn nun das Hauptachsensystem $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ in Richtung $\mathbf{e}'_1$ auf den Schwerpunkt verschoben wird, werden die Drehachsen $\mathbf{e}'_2$ und $\mathbf{e}'_3$ jeweils um $|\mathbf{R}|$ parallel verschoben, $\mathbf{e}'_1$ dagegen bleibt unverändert. Der Satz von Steiner, rückwärts angewendet, führt dann auf

$$\begin{array}{ll} I_1 & = \tilde{I}_1 \\ I_2 & = \tilde{I}_2 - M_{tot} |\mathbf{R}|^2, \quad M_{tot} = 3m + M \\ I_3 & = \tilde{I}_3 - M_{tot} |\mathbf{R}|^2 \end{array}$$

Um das Ergebnis einfach nachprüfbar zu halten, vereinfachen wir auf $M = m$, dann gilt

$$\mathbf{R} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{R}|^2 = \frac{a^2}{2}, \quad M_{tot} = 4m$$

also

$$\boxed{I_1 = ma^2, \quad I_2 = ma^2, \quad I_3 = 2ma^2}$$

Dies ergibt sich natürlich auch direkt, wenn man $M = m$ setzt und die I_{ij} berechnet; also bezüglich eines Koordinatensystems, dessen x und y -Achsen durch die Ecken des Quadrats aus den 4 Massen m gehen, mit dem Ursprung in der Mitte (Schwerpunkt).

3. Trägheitstensor einer kontinuierlichen Masseverteilung

(8 Punkte)

(a)

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{m}{a^3}, & 0 \leq x, y, z \leq a, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) (x_2^2 + x_3^2) d^3x = \frac{m}{a^3} \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \int_0^a dx_3 (x_2^2 + x_3^2) \\ &= \frac{m}{a^3} a \frac{a^3}{3} a + \frac{m}{a^3} a a \frac{a^3}{3} = \frac{2ma^2}{3} = I_{2,2} = I_{3,3}. \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned} I_{12} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) x_1 x_2 d^3x = -\frac{m}{a^3} \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \int_0^a dx_3 x_1 x_2 \\ &= -\frac{m}{a^3} \frac{a^2}{2} \frac{a^2}{2} a = -\frac{ma^2}{4} = I_{1,3} = I_{2,3} = I_{2,1} = I_{3,1} = I_{3,2}. \end{aligned}$$

Also in Matrixform:

$$\mathbf{I} = (I_{ij}) = \frac{ma^2}{12} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{I}$ ist symmetrisch.

(c) Eigenwerte von $\mathbf{I}$ liefern die Hauptträgheitsmomente I_i :

$$|\mathbf{I} - \lambda \mathbf{1}| = \frac{121}{864} a^6 m^3 - \frac{55}{48} a^4 m^2 \lambda + 2a^2 m \lambda^2 - \lambda^3.$$

Ansatz:

$$\lambda = \frac{ma^2}{12} \alpha \Rightarrow 242 - 165\alpha + 24\alpha^2 - \alpha^3 = -(\alpha - 2)(\alpha - 11)^2 \stackrel{!}{=} 0,$$

also

$$I_1 = \lambda_1 = \frac{ma^2}{6}, \quad I_{2,3} = \lambda_{2,3} = \frac{11ma^2}{12}.$$

Hauptträgheitsachse $\vec{e}_1'$ zu I_1 ist Eigenvektor zu I_1 :

$$\mathbf{I} - \lambda_1 \mathbf{1} = \frac{ma^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

also

$$\vec{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2P).$$

Hauptträgheitsachsen $\vec{e}_{2,3}'$ zu $I_{2,3}$:

$$\mathbf{I} - \lambda_2 \mathbf{1} = -\frac{ma^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

also zum Beispiel

$$\vec{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (3P).$$

Die Hauptträgheitsachsen zu verschiedenen Hauptträgheitsmomenten stehen also senkrecht aufeinander.

(e) $\vec{\omega}_1 = (\omega_1, 0, 0)^T$, also

$$\vec{L}_{\text{rot}} = \mathbf{I} \vec{\omega}_1 = \frac{ma^2 \omega_1}{12} \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Damit sind Drehimpuls und Rotationsachse nicht parallel zueinander.

(f)

$$\vec{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \omega_2 \vec{v}_1,$$

also

$$\vec{L}_{\text{rot}} = \mathbf{I} \vec{\omega}_2 = I_1 \vec{\omega}_2.$$

Drehimpuls und Rotationsachse sind parallel zueinander, da die Drehachse mit einer der Hauptachsen zusammenfällt.