

Theoretische Physik B SS 10

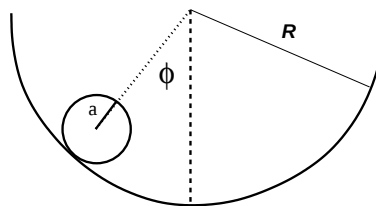
Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 12
06.07.2010

1. Oszillation eines Zylinders

(5 Punkte)

Betrachten sie einen homogenen Kreiszylinder mit dem Radius a , der auf der Innenseite einer zylindrischen Oberfläche mit dem Radius R abrollt.



- (a) Bestimmen sie das Trägheitsmoment I_3 des Zylinders durch seine Symmetrieachse. (1 Punkt)
- (b) Verwenden sie den Winkel ϕ (siehe Abbildung) als verallgemeinerte Koordinate und stellen sie die Lagrangefunktion dieses Systems auf.

Hinweise:

(i) Die kinetische Energie kann generell in die Bewegung des Schwerpunktes und die Rotation um den Schwerpunkt aufgeteilt werden, d.h. $T = M\dot{\vec{R}}^2/2 + I_3\dot{\alpha}^2/2$, wobei $\dot{\alpha}$ die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Symmetrieachse des abrollenden Zylinders ist.

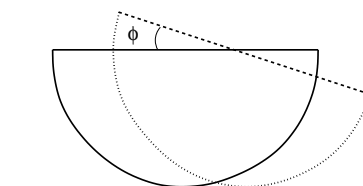
(ii) Sie benötigen eine Relation $\dot{\alpha}(\dot{\phi})$. Finden sie dazu erst die Geschwindigkeit $V = |\dot{\vec{R}}|$ des Schwerpunktes als Funktion von $\dot{\phi}$ und gewinnen damit dann die gewünschte Beziehung.

- (c) Bestimmen die für kleine Auslenkungen ϕ die Frequenz ω der Schwingung. (1 Punkt)

2. Oszillation eines Halbzylinders

(5 Punkte)

Betrachten Sie ein Halbzylinder auf einer Ebene (siehe Abbildung). Die Masse des Zylinders ist M , der Radius R , die Länge L . Der Zylinder wippt auf der Ebene. Der Winkel ϕ ist kleiner als $\pi/2$. Wir wollen die Bewegung des Zylinders beschreiben.



- (a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Zylinders und das Trägheitsmoment entlang der Achse des Zylinders bezüglich eines Koordinatensystems dessen Ursprung im

Schwerpunkt des Zylinders ist. (Hinweis: Finden Sie erst das Trägheitsmoment bezüglich des Zentrums des Zylinders und benutzen Sie dann den Steiner'schen Satz). (2 Punkte)

- (b) Wählen Sie als verallgemeinerte Koordinate den Winkel ϕ und bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des Systems. (2 Punkte)
- (c) Geben Sie die allgemeine Bewegungsgleichung und dann die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen an. Was ist die Frequenz der Schwingungen? (1 Punkt)

3. Drehmatrizen

(5 Punkte)

Eine beliebige Drehung kann wie folgt durch die Euler'schen Winkel parametrisiert werden: $D(\varphi, \theta, \psi) = D^z(\psi)D^x(\theta)D^z(\varphi)$, wobei

$$D^z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D^x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$D^z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Finden Sie durch explizite Matrixmultiplikation die Drehmatrix $D(\varphi, \theta, \psi)$. (2 Punkte)
- (b) $D^k(\alpha)$ sei die Drehmatrix für eine Drehung im raumfesten Koordinatensystem durch einen Winkel α um die k -Achse, für $k = x, y, z$. Geben Sie diese Matrizen explizit an. (2 Punkte)
- (c) Finden Sie [durch Vergleich der Matrizen von (3b) mit dem Ergebnis von (3a) für $D(\varphi, \theta, \psi)$] die Euler'schen Winkel für $D^y(\alpha)$. (1 Punkt)

4. Winkelgeschwindigkeit mit Euler'schen Winkel

(5 Punkte)

Die Bewegungsgleichungen für die Basisvektoren des körperfesten Systems bei Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ lauten

$$\dot{\vec{e}}_i(t) = \vec{\Omega}(t) \times \vec{e}_i(t)$$

Andererseits gilt

$$\vec{e}_i(t) = \sum_k D_{ik}(t) \vec{n}_k$$

wobei $D_{ik}(t) = D_{ik}(\phi(t), \theta(t), \psi(t))$ die durch die Euler'schen Winkel gegebene Drehmatrix ist. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Komponenten des Vektors $\vec{\Omega} = \sum_j \Omega_j \vec{e}_j$ wie folgt ausgedrückt werden können.

$$\Omega_1 = \sum_j D_{3j} \dot{D}_{2j} \quad , \quad \Omega_2 = \sum_j D_{1j} \dot{D}_{3j} \quad , \quad \Omega_3 = \sum_j D_{2j} \dot{D}_{1j} \quad .$$

Daraus ergibt sich

$$\Omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad , \quad \Omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad , \quad \Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

Beweisen Sie die Relation für Ω_2 unter Verwendung der Matrix D . (5 Punkte)