Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Theoretische Physik B - Lösungen SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman

Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

Blatt 12

06.07.2010

---

1. Oscillation eines Zylinders (5 Punkte)

(a) Trägheitstensor ist $I_{ik} = \int \rho(\vec{x})[\delta_{ik}\vec{x}^2 - x_i x_k]d^3x$. Wir legen das Körperfeste Koordinatensystem auf die Symetrieachse (x_3 kommt aus der Ebene heraus). Dann ist

$$
\begin{aligned}
I_3 &= I_{33} && (1)\\
&= L\rho \int_{x_1^2+x_2^2<a^2} (x_1^2 + x_2^2) dx_1\, dx_2 && (2)\\
&= 2\pi L\rho \int_0^a r^3\, dr && (3)\\
&= \frac{\pi}{2} L\rho a^4 && (4)\\
&= \frac{Ma^2}{2} && (5)
\end{aligned}
$$

(b) Die Lagrangefunktion ist gegeben durch

$$L = T_{Rot} + T_{SP} - U$$

wobei T_{Rot} die Rotationsenergie, T_{SP} die kinetische Energie des Schwerpunktes und U die potentielle Energie bezeichnen. Zur Rotationsenergie: Es gilt

$$V = (R - a)\dot{\phi}$$

und damit gilt

$$\dot{\alpha} = \frac{V}{a} = \frac{R-a}{a}\dot{\phi}\,.$$

Es folgt

$$T_{Rot} = I_3\dot{\alpha}^2/2 = M(R-a)^2\dot{\phi}^2/4\,.$$

Ausserdem hat man für die kinetische Energie des Schwerpunktes

$$T_{SP} = M\dot{\vec{R}}^2/2 = M(R-a)^2\dot{\phi}^2/2\,.$$

Die potentielle Energie ergibt sich zu

$$U = Mgz = -Mg(R-a)\cos\phi\,.$$

Damit lautet die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = 3M(R-a)^2\dot{\phi}^2/4 + Mg(R-a)\cos\phi\,. \qquad (6)$$

(c) Für kleine Winkel gilt:

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = 3M(R-a)^2\dot{\phi}^2/4 - Mg(R-a)\phi^2/2. \tag{7}$$

Euler-Lagrange Gleichung:

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-a}\phi^2 = 0 \tag{8}$$

Es folgt:

$$\omega^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{R-a} \tag{9}$$

2. Oscillation eines Halbzylinders (5 Punkte)

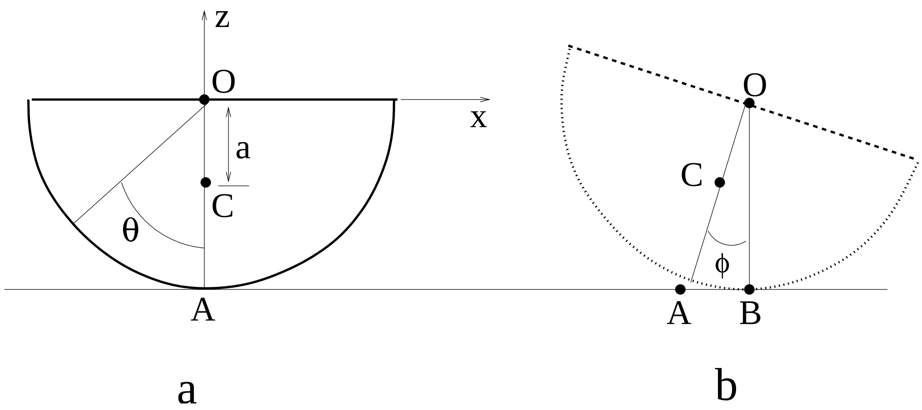

Abbildung 1: Halb-Zylinder.

(a) Wir berechnen den Schwerpunkt $\vec{R}$ (hierzu verwenden wir ein etwas anderes Koordinatensystem wie unten in der Abbildung: x-Achse bleibt gleich, z-Achse wird zur y-Achse, jedoch um π gedreht und die z-Achse kommt durch O aus der Zeichenebene heraus)

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\rho\int \vec{r}dV = \frac{2}{\pi R^2 L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \int_0^{\phi} d\phi \int_0^a rdr \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix} = \frac{4R}{3\pi}\vec{e}_y \tag{10}$$

Wir setzen $a = \frac{4R}{3\pi}$.
Nun wechseln wir wieder zum Koordinatensystem der Abbildung. Das Trägheitsmoment bezüglich der y-Achse ,die durch den Ort O geht ergibt sich aus

$$I_O = \rho\int dV(x^2+z^2) = \pi\rho L\int_0^R RdR \cdot R^2 = \pi\rho L R^4/4 = \frac{MR^2}{2}$$

Der Steiner'scher Satz besagt das das Trägheitsmoment bezüglich der Achse, die, parallel der y-Achse, durch den Schwerpunkt geht ist, gegeben ist durch

$$I_C = I_O - Ma^2 = M(R^2/2 - a^2)$$

(b) Erst bestimmen wir die Schwerpunktenergie. Dazu brauchen wir die Änderungen die Position des Schwerpunkts. Der Abstand $|AB|$ (siehe Abb. 1b) ergibt sich als $|AB| = R\phi$. Dann gilt

$$x_C = |AB| - a\sin\phi = R\phi - a\sin\phi$$

und

$$z_C = -a\cos\phi$$

Die Schwerpunktsenergie lautet

$$T_C = \frac{M}{2}(\dot{x}_C^2 + \dot{z}_C^2) = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2((R - a\cos\phi)^2 + (a\sin\phi)^2) = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\phi)$$

Die Rotationsenergie lautet

$$T_R = \frac{I_C}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2(R^2/2 - a^2)$$

Die gesamte kinetische Energie ist

$$T = T_C + T_R = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2(3R^2/2 - 2Ra\cos\phi)$$

Die potenzielle Energie lautet

$$U = mgz_C = -Mga\cos\phi$$

Die Lagrange-Funktion ist

$$L = T - U = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2(3R^2/2 - 2Ra\cos\phi) + Mga\cos\phi$$

(c) Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\left\{M\dot{\phi}(3R^2/2 - 2Ra\cos\phi)\right\} = -Mga\sin\phi + MRa\dot{\phi}^2\sin\phi$$

Das ergibt

$$\ddot{\phi}(3R^2/2 - 2Ra\cos\phi) + \dot{\phi}^2(2Ra\sin\phi) = -ga\sin\phi + Ra\dot{\phi}^2\sin\phi$$

Für kleine Auslenkungen $\phi \ll 1$ können wir linearisieren

$$\ddot{\phi}(3R^2/2 - 2Ra) = -ga\phi$$

oder

$$R\ddot{\phi}(9\pi/8 - 2) = -g\phi$$

Die Frequenz der harmonischen Schwingungen ergibt sich als

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R(9\pi/8 - 2)}}$$

3. Drehmatrizen (5 Punkte)

(a) Das Produkt der Matrizen $D(\varphi,\theta,\psi) = D^z(\psi)D^x(\theta)D^z(\varphi)$ lautet ausgeschrieben

$$D = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt als Zwischenschritt

$$D = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi & \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$D = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{array}\right)$$

(b) Die Matrizen D^x und D^z wurden schon in **(1a)** gegeben,

$$D^z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Jetzt bestimmen wir $D^y(\alpha)$. Ein positiver Winkel α beschreibt eine rechthändige Drehung um die y-Achse. Die Transformation bei der Drehung lautet also

$$\vec{e}_z^{\,\prime} = \vec{e}_z\cos\alpha + \vec{e}_x\sin\alpha \qquad \vec{e}_x^{\,\prime} = -\vec{e}_z\sin\alpha + \vec{e}_x\cos\alpha$$

und entsprechende Matrix

$$D^y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(c) Der Vergleich mit dem Ergebnis von (a) zeigt, dass die Drehung um die y-Achse durch folgende Euler-Winkel erreicht wird $\varphi = \pi/2$, $\theta = \alpha$, und $\psi = -\pi/2$.

4. Winkelgeschwindigkeit mit Euler'schen Winkel (5 Punkte)

Wir berechnen, z.B., $\Omega_2 = \sum_j D_{1j}\dot{D}_{3j}$. Dazu brauchen wir

$$\begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi \\ \sin\theta\sin\psi \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} D_{31} \\ D_{32} \\ D_{33} \end{pmatrix} = \dot{\phi}\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\theta}\begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta \\ -\cos\varphi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Multiplizieren ergibt

$$\Omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$