ÜBUNGEN ZUR KLASSISCHEN THEORETISCHEN PHYSIK II — BLATT 1

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik) — Abgabe: Donnerstag, 21.04.2011, 11 Uhr

Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik) — Besprechung: Dienstag, 26.04.2011

Aufgabe 1: Brachystochronenproblem — 5 Punkte

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für das Brachystochronenproblem das Integral

$$\int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}} dx, \quad y = y(x) \quad (g = \text{Erdbeschleunigung}) \tag{1}$$

zu minimieren ist.

a) Zeigen Sie, dass unter Verwendung der Euler'schen Gleichung die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}(y(1+y'^2)) = 0 \tag{2}$$

folgt.

b) Zeigen Sie, dass die Parametrisierung der Kurve (mit ψ als Bahnparameter)

$$x = R(\psi + \sin\psi), \quad y = R(1+\cos\psi) \tag{3}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (2) ist. Drücken Sie hierzu $y' = dy/dx$ durch $dy/d\psi$ und $dx/d\psi$ aus.

Aufgabe 2: Fermat'sches Prinzip — 5 Punkte

Gegeben sei ein optisches Medium in zwei Dimensionen mit einem Brechungsindex $n(x, y) = a/y$, $a \in \mathbb{R}$. Die Lichtgeschwindigkeit in diesem Medium ist somit $v(x, y) = c_0/n(x, y)$.

a) Zeigen Sie, dass die Laufzeit eines Lichtstrahls zwischen zwei Punkten A und B gegeben ist durch

$$T = \frac{1}{c_0} \int_A^B n(x, y)\sqrt{1+y'^2}\, dx, \quad y = y(x)\,. \tag{1}$$

Nach dem Fermat'schen Prinzip breiten sich Lichtstrahlen in einem Medium entlang einer Bahn aus, die die Laufzeit minimiert.

b) Stellen Sie mit Hilfe der Euler'schen Gleichung eine Differentialgleichung für die Bahnkurve $y(x)$ auf und lösen Sie diese.

c) Zeigen Sie, dass sich die Lichtstrahlen entlang von Kreislinien ausbreiten.