

Aufgabe 3: Rotationsfläche

5 Punkte

- a) Zeigen Sie, dass falls $F(y(x), y'(x), x) \equiv F(y(x), y'(x))$, d.h. F nicht explizit von x abhängt, gilt:

$$\frac{d}{dx} H(y, y') = 0,$$

wobei

$$H(y, y') = F(y, y') - y'(x) \frac{\partial}{\partial y'} F(y, y')$$

ist und F die Euler'schen Gleichungen erfüllt.

- b) Leiten Sie eine Formel für die Fläche her, die durch Rotation der Kurve $(r(z), 0, z)$ mit $r(-D/2) = r(D/2) = R$ um die z -Achse entsteht.
- c) Berechnen Sie unter Ausnutzung von a) die Form der Kurve $r(z)$, die die Oberfläche minimiert.

Aufgabe 4: Geodäten

5 Punkte

Betrachten Sie die Oberfläche der Einheitskugel. Zur Parametrisierung der Kugeloberfläche verwenden wir Kugelkoordinaten

$$\vec{x}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ in Abhängigkeit von θ und ϕ .
- b) Berechnen Sie das Wegelement ds , die Metrik ist gegeben durch $g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$.
- c) Zeigen Sie, dass der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf der Oberfläche einer Kugel durch Segmente von Großkreisen gegeben ist. Finden Sie hierzu eine Differentialgleichung für $\phi(\theta)$ und wählen Sie unter Ausnutzung der Kugelsymmetrie eine geeignete Lage des Koordinatensystems.