Lösungen zu Aufgabenblatt 6

Aufgabe 16

a. kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2$$

potentielle Energie:

$$U = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g l_1 \cos\varphi_2 + \frac{D}{2} l^2 (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)^2$$

Für die Lagrangefunktion ergibt sich damit

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_1 g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2 - \frac{D}{2} l^2 (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)^2$$

Die Bewegungsgleichungen sind dann

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{dL}{d\varphi_1} = m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 g l_1 \sin\varphi_1 - D l^2 (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)\cos\varphi_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{dL}{d\varphi_1} = m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 g l_2 \sin\varphi_2 + D l^2 (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)\cos\varphi_2 = 0$$

und für kleine Auslenkungen $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$ ergibt sich

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l_1}\varphi_1 - \frac{D l^2}{m_1 l_1^2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l_2}\varphi_2 + \frac{D l^2}{m_2 l_2^2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

b. Für den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$ und $l_1 = l_2 = l_0$ und den Abkürzungen $k = \frac{D l^2}{m l_0^2}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{l_0}$ ergeben sich die Bewegungsgleichung zu

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 - k(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 + k(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

Der Ansatz $\varphi_i = a_i \exp i\omega t$ führt auf das Gleichungssystem

$$(-\omega^2 + k + \omega_0^2)a_1 - k a_2 = 0$$

$$-k a_1 + (-\omega^2 + k + \omega_0^2)a_2 = 0$$

Für die Existenz einer nicht-trivialen Lösung muss die Determinate verschwinden

$$(-\omega^2 + k + \omega_0^2)^2 - k^2 = 0$$

Hieraus ergeben sich die Lösungen für ω^2

$$\omega^2 = \omega_0^2 \quad \text{oder} \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2k$$

Die Fundamentalmoden sind somit

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \cos(\omega_0 t + \delta)$$

und

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \cos(\sqrt{\omega_0^2 + 2k}t + \delta)$$

Die allgemeinste Lösung ist eine Superposition der Fundamentalschwingungen

$$\varphi_1(t) = (a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t) + (c\cos\sqrt{\omega_0^2 + 2k}t + d\sin\sqrt{\omega_0^2 + 2k}t)$$
$$\varphi_2(t) = (a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t) - (c\cos\sqrt{\omega_0^2 + 2k}t + d\sin\sqrt{\omega_0^2 + 2k}t)$$

mit $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 + 2k}$

$$\varphi_1(t) = (a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t) + (c\cos\omega' t + d\sin\omega' t)$$
$$\varphi_2(t) = (a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t) - (c\cos\omega' t + d\sin\omega' t)$$

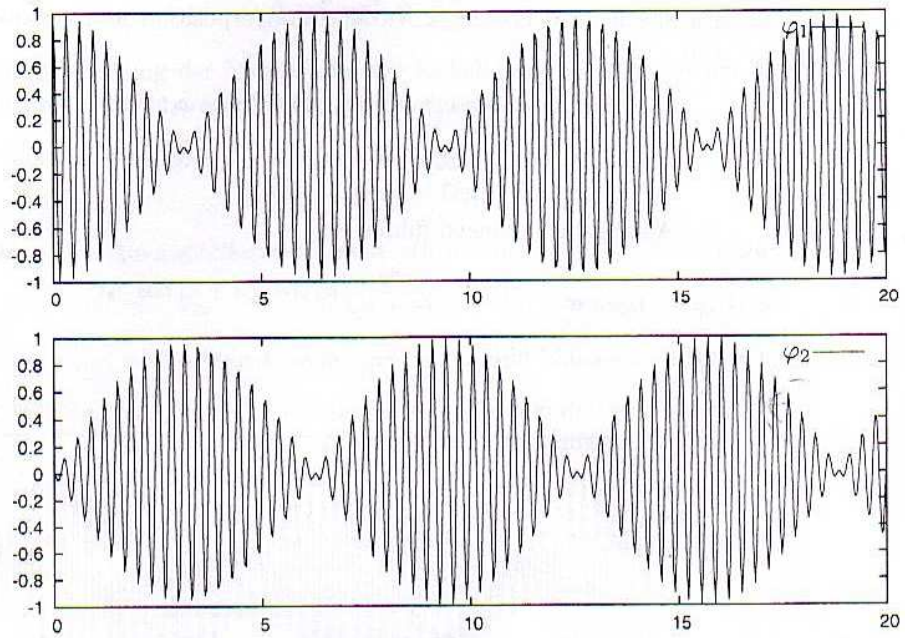
Die Anfangsbedingungen führen auf

$$a + c = \varphi_0, \quad a - c = b + d = b - d = 0$$

also

$$a = c = \frac{\varphi_0}{2}, \quad b = d = 0$$

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_0}{2}\cos\omega_0 t + \frac{\varphi_0}{2}\cos\omega' t = \varphi_0 \cos\frac{\omega' - \omega_0}{2}t\cos\frac{\omega' + \omega_0}{2}t$$
$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi_0}{2}\cos\omega_0 t - \frac{\varphi_0}{2}\cos\omega' t = \varphi_0 \sin\frac{\omega' - \omega_0}{2}t\sin\frac{\omega' + \omega_0}{2}t$$



c. Für den Spezialfall $m_1 \neq m_2$ und $l_1 = l_2 = l_0$ und den Abkürzungen $k_1 = \frac{Dl^2}{m_1 l_0^2}$, $k_2 = \frac{Dl^2}{m_2 l_0^2}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{l_0}$ ergeben sich die Bewegungsgleichung zu

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 - k_1(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$
$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 + k_2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

Der Ansatz $\varphi_i = a_i \exp i\omega t$ führt auf das Gleichungssystem

$$(-\omega^2 + k_1 + \omega_0^2)a_1 - k_1 a_2 = 0$$
$$-k_2 a_1 + (-\omega^2 + k_2 + \omega_0^2)a_2 = 0$$

Für die Existenz einer nicht-trivialen Lösung muss die Determinate verschwinden

$$(-\omega^2 + k_1 + \omega_0^2)(-\omega^2 + k_2 + \omega_0^2) - k_1 k_2 = 0$$

Hieraus ergeben sich die Lösungen für ω^2

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 \quad \text{und} \quad \omega_b^2 = \omega_0^2 + k_1 + k_2$$

Die Fundamentalmoden sind somit

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \cos(\omega_0 t + \delta)$$

und

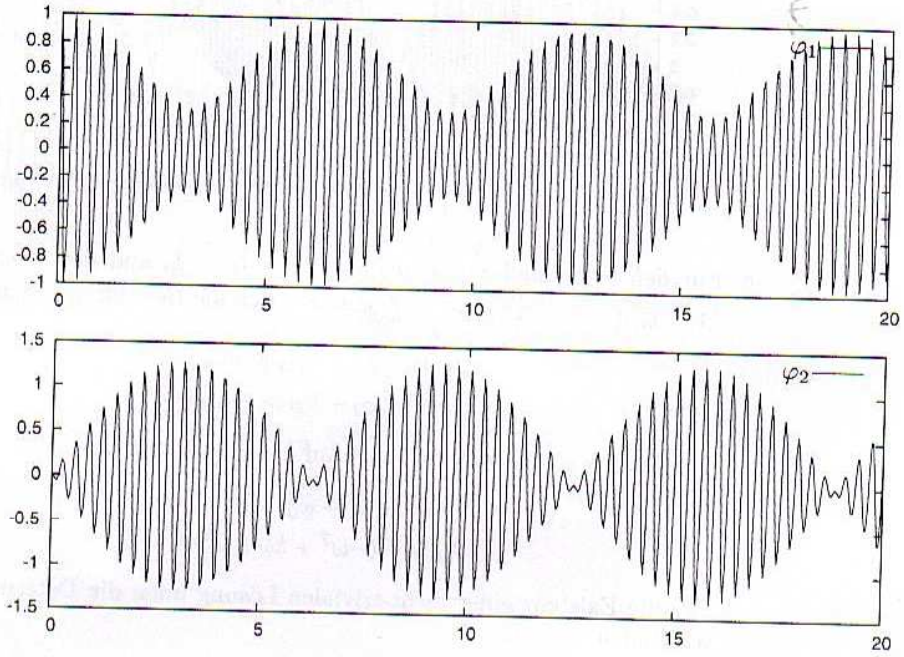
$$\varphi_1(t) = -\frac{k_1}{k_2}\varphi_2(t) = \cos(\omega_b t + \delta)$$

Die allgemeinste Lösung ist wieder die Superposition der Fundamentalschwingungen

$$\varphi_1(t) = (a\cos\omega_a t + b\sin\omega_a t) + (c\cos\omega_b t + d\sin\omega_b t)$$
$$\varphi_2(t) = (a\cos\omega_a t + b\sin\omega_a t) - \frac{k_2}{k_1}(c\cos\omega_b t + d\sin\omega_b t)$$

Die Anfangsbedingungen führen auf

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_0}{k_1 + k_2}(k_2\cos\omega_a t + k_1\cos\omega_b t)$$
$$\varphi_2(t) = \frac{k_2\varphi_0}{k_1 + k_2}(\cos\omega_a t - \cos\omega_b t)$$



Aufgabe 17

a. Die Auslenkung der Massen aus der Ruhelage werde beschrieben durch die Koordinaten q_i, die Bewegungsgleichungen sind dann

$$m\ddot{q}_1 + 2Dq_1 - Dq_2 = 0$$
$$m\ddot{q}_2 + 2Dq_2 - Dq_1 = 0$$

Diese Bewegungsgleichungen lassen sich in eine kompakte Form bringen

$$m\ddot{q}_i + D(2q_i - q_{i+1} - q_{i-1}) = 0, \quad i = 0, \ldots, 3, \quad \text{mit } q_0(t) = q_3(t) = 0$$

Diese Form lässt sich leicht auf viele Federn und Massen verallgemeinern.

b. Für kleine Auslenkungen aus der Horizontalen findet man für die Kraft $F_{j+1j} = F\sin\alpha \approx F\tan\alpha = F\frac{q_{j+1}-q_j}{l_0}$ Die Bewegungsgleichungen haben dann näherungsweise die Form

$$m\ddot{q}_i + \frac{F}{l_0}(2q_i - q_{i+1} - q_{i-1}) = 0, \quad i = 0, \ldots, 3, \quad \text{mit } q_o(t) = q_3(t) = 0$$

mit $D := F/l_0$ also die selbe Form wie in Teil a).

c. Die Bewegungsgleichungen haben also die Form

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2D}{m} & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{2D}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0$$

Die Fundamentalfrequenzen sind die Eigenwerte der Matrix

$$K = \begin{pmatrix} \frac{2D}{m} & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{2D}{m} \end{pmatrix}$$

also

$$\left(\frac{2D}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{D}{m}\right)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \omega_\pm^2 = (2 \pm 1)\frac{D}{m}$$

mit den Eigenvektoren

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeinste Lösung ist somit

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = a_+(c_1\cos\omega_+ t + c_2\sin\omega_+ t) + a_-(c_3\cos\omega_- t + c_4\sin\omega_- t)$$

Aufgabe 18

a. Die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{k}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2]$$

ist von der Form

$$L = \frac{1}{2}\sum M_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum K_{ij}x_i x_j$$

$$\text{mit } M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \text{ und } K = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

b. Die Eigenfrequenzen ω_i ergeben sich als Lösung der Gleichung

$$|K - \omega^2 M| = 0\,.$$

Also

$$\begin{aligned}&(k - m\omega^2)^2(2k - M\omega^2) - 2k^2(k - m\omega^2)\\ &= \omega^2(k - m\omega^2)(Mm\omega^2 - k(2m + M)) = 0\end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = \sqrt{k/m},\ \omega_3 = \sqrt{k(1 + 2m/M)/m}$$

und den zugehörigen Eigenvektoren

$$a_1 = (1, 1, 1)^T,\ a_2 = (1, 0, -1)^T,\ a_3 = (1, -2m/M, 1)^T$$

c. Die Ersetzung $x = AQ$ mit der Matrix

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

liefert die Normalkoordinaten Q_i in denen man ungekoppelte Differentialgleichungen erhält.

d. Die allgemeinste Lösung ist

$$x(t) = a_1(B_1 t + B_2) + a_2(B_3 \sin(\omega_2 t + B_4)) + a_3(b_5 \sin(\omega_3 + B_6))$$

Beachte: Die Lösung zu $\omega = 0$ ist $a + bt$! Die zugehörige Normalkoordinate entspricht dem Schwerpunkt des Systems.