ÜBUNGEN ZUR KLASSISCHEN THEORETISCHEN PHYSIK II — BLATT 8

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik) — Abgabe: Montag, 20.06.2011, 11:30 Uhr
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik) — Besprechung: Dienstag, 21.06.2011

Aufgabe 22: inhomogene Differentialgleichungen — 2 Punkte

Es treten häufig inhomogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = \sum_n \left(A_n \cos n\tau + B_n \sin n\tau\right) \tag{1}$$

auf.

a) Zeigen Sie, dass für Differentialgleichungen diesen Typs das Superpositionsgesetz gilt, d.h. falls $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen der Differentialgleichungen

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = f_j(\tau)\,, \quad j = 1, 2$$

sind, dann ist $x(\tau) = x_1(\tau) + x_2(\tau)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = f_1(\tau) + f_2(\tau)\,.$$

Es ist also ausreichend, sich die Lösungen der Differentialgleichung (1) für die einzelnen Terme auf der rechten Seite getrennt anzuschauen.

b) Berechnen Sie die speziellen Lösungen der Differentialgleichungen

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = A_n \cos n\tau\,,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $n = 1$ und $n > 1$ getrennt, machen Sie den Ansatz $x(\tau) = a_1 \tau \sin \tau$ bzw. $x(\tau) = a_n \cos n\tau$ und bestimmen Sie die Koeffizienten a_i.

Wiederholen Sie die Analyse für die Differentialgleichungen

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = B_n \sin n\tau\,.$$

Aufgabe 23: selbsterregender Schwinger — 5 Punkte

Betrachten Sie ein System mit der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \epsilon\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = 0\,.$$

Diese Differentialgleichung, eine vereinfachte Form der "Van der Polschen Gleichung", beschreibt ein System, bei dem kleine Auslenkungen verstärkt und große gedämpft werden.
Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe der Störungstheorie bis zur zweiten Ordnung in ϵ.
Zur Zeit $t = 0$ gelte $\dot{x}(0) = 0$.

a) Ersetzen Sie $\tau = \omega t$ und zeigen Sie, dass man dann die Differentialgleichung

$$\omega^2 x'' + \epsilon\omega\left(x^2 - 1\right)x' + x = 0$$

erhält, wobei der Strich die Ableitung nach τ bezeichnet.

b) Machen Sie für x und ω einen Potenzreihenansatz der Form

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2\,,$$
$$\omega = 1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2\,.$$

Setzen Sie diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein und sortieren Sie nach Potenzen von ϵ, wobei Terme der Ordnung ϵ^3 und höher zu vernachlässigen sind. Lösen Sie die so erhaltenen Differentialgleichungen für x_0, x_1, x_2 iterativ.

(bitte wenden)

<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie Identitäten für die Produkte von trigonometrischen Funktionen, um diese zu beseitigen und verwenden Sie dann die Ergebnisse aus Aufgabe 22. Terme der Form $\tau \sin\tau$ bzw. $\tau\cos\tau$ sind nicht physikalisch, eliminieren Sie sie durch geeignete Wahl der Konstanten. Für x_1 und x_2 sollten die Differentialgleichungen die folgende Form haben:

$$
\begin{aligned}
x_1'' + x_1 &= 2A_0\omega_1 \cos\tau + \left(\frac{1}{4}A_0^3 - A_0\right)\sin\tau + \frac{A_0^3}{4}\sin 3\tau \\
x_2'' + x_2 &= \left(4\omega_2 + \frac{1}{4}\right)\cos\tau + 2C_2\sin\tau - \frac{3}{2}\cos 3\tau + 3C_2 \sin 3\tau + \frac{5}{4}\cos 5\tau\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 24: Konvergenz der Störungsreihe — 3 Punkte

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x} = x + \epsilon x^2$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = A$.

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung der Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung in 2. Ordnung der Störungsreihe. Machen Sie hierzu einen Potenzreihenansatz (in ϵ) für $x(t)$.

c) Entwickeln Sie die exakte Lösung aus a) in ϵ und vergleichen Sie mit der Näherung aus b). Für welche Zeiten ist die Näherung sinnvoll?