Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)
Abgabe: Montag, 27.06.2011, 11:00 Uhr
Besprechung: Dienstag, 28.06.2011

Aufgabe 25: Poisson-Klammern — 7 Punkte

Die Poisson-Klammer zweier Funktion $f(\underline{p}, \underline{q}, t), g(\underline{p}, \underline{q}, t)$ ($\underline{q} = q_1, \ldots, q_n$; $\underline{p} = p_1, \ldots, p_n$,), die von den verallgemeinerten Koordinaten q_i und Impulsen $p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L$ abhängen, ist gegeben durch

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \,.$$

a) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Poisson-Klammer. f, f_1, f_2, f_3, g seien Funktionen und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

(i)

$$\begin{aligned} \{f_1 + f_2, g\} &= \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \,, \\ \{f_1 f_2, g\} &= f_1\{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2 \,, \\ \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} &= \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\} \end{aligned}$$

(ii)

$$\{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k} \,, \quad \{f, p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k} \,,$$

womit dann

$$\{q_i, q_k\} = 0 \quad \{p_i, p_k\} = 0 \quad \{p_i, q_k\} = \delta_{ik}$$

gilt.

(iii) Jacobi-Identität:

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 0$$

(iv) Poisson-Theorem: Seien f und g zwei Integrale der Bewegung, d.h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g = 0$, dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f, g\} = 0 \,.$$

b) Betrachten Sie im folgenden den dreidimensionalen Fall in kartesischen Koordinaten, der Drehimpuls sei definiert durch

$$\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p} \,.$$

Berechnen Sie

(i) $\{L_i, p_j\}$

(ii) $\{L_i, L_j\}$

(iii) Sei φ eine skalare Funktion von $\vec{q}$ und $\vec{p}$, d.h φ hängt nur von den Kombinationen $\vec{q}^2, \vec{p}^2, \vec{q} \cdot \vec{p}$ ab: $\varphi = \varphi(\vec{q}^2, \vec{p}^2, \vec{q} \cdot \vec{p})$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\{\varphi, L_z\} = 0 \,.$$

(bitte wenden)

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)

Abgabe: Montag, 27.06.2011, 11:00 Uhr
Besprechung: Dienstag, 28.06.2011

Aufgabe 26: Teilchen im Magnetfeld — 3 Punkte

Die Bewegung eines elektrisch geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld wird durch die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q(\phi(\vec{r}) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}))$$

beschrieben, wobei m die Masse und q die elektrische Ladung des Teilchens sind. ϕ ist das skalare und $\vec{A}$ das Vektorpotential.

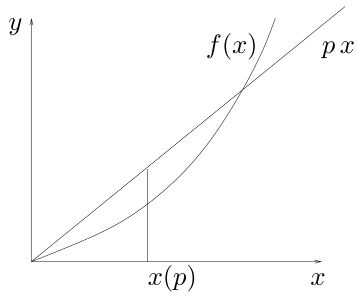
a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion auf.

b) Betrachten Sie nun den Fall $\phi = 0$ und $\vec{A}(\vec{x}) = (0, xB, 0)$. Dies führt über $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ auf ein konstantes Magnetfeld in z-Richtung. Stellen Sie für diesen Fall die kanonischen Gleichungen auf und lösen Sie sie.

Aufgabe 27: Legendre-Transformation — 3 Bonuspunkte

Die Legendre-Transformation hat eine einfache geometrische Interpretation. Betrachten Sie eine konvexe Funktion $f(x)$ (konvex: $f''(x) > 0$). Betrachten Sie zusätzlich die Gerade $y = px$, $p > 0$. Sei $x(p)$ der Punkt, an dem die Kurve $f(x)$ am weitesten von der Geraden in vertikaler Richtung entfernt ist, d.h. die Funktion

$$F(p, x) = p\,x - f(x)$$



hat ein Maximum in Bezug auf x für $x = x(p)$. Die Legendre-Transformierte $g(p)$ ist dann definiert durch

$$g(p) = F(p, x(p))\,.$$

a) Berechnen Sie die Legendre-Transformierte von $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}\,, \quad \alpha > 1$

b) Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(p)$ heißen dual im Youngschen Sinne, falls sie die Legendre-Transformierte der jeweils anderen sind. Zeigen Sie die Youngsche Ungleichung

$$xp \leq f(x) + g(p)\,.$$

Zeigen Sie hiermit

$$px \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}p^2$$

und

$$px \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$$

mit $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, $x, p > 0$, $\alpha, \beta > 1$.