

Wichtig: Die Modulprüfung findet am 21.07.2011 von 14:00 – 17:00 im Gerthsen Hörsaal (Nachnamen A-K) und im Audimax (Nachnamen L-Z) statt. Zugelassenes Hilfsmittel ist ein doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt.

Melden Sie sich im Studierendenportal vom **14.07.2011** bis zum **19.07.2011** für die Modulprüfung an. Falls Sie die Vorleistungen erbracht haben, aber sich aus technischen Gründen nicht im Studierendenportal anmelden können, füllen Sie bitte das Formular <http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~marquard/anmeldung.pdf> aus und werfen Sie es in den Briefkasten im Erdgeschoss des Physik-Hochhauses.

Aufgabe 31: Trägheitstensoren

6 Punkte

Der Trägheitstensor eines starren Körpers ist definiert durch

$$I_{ij} = \int \rho(x_1, x_2, x_3) (\vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dV,$$

wobei $\rho(x_1, x_2, x_3)$ der Dichteverteilung des Körpers entspricht.

- a) Berechnen Sie den Trägheitstensor für Rotationen um den Schwerpunkt für
 - (i) einen homogenen Quader mit den Seitenlängen a, b, c
 - (ii) einen homogenen Zylinder mit Höhe h und Radius r
 - (iii) eine homogene Kugel mit Radius r
 - (iv) einen dünnen Reifen mit Radius r
- b) Zeigen Sie, dass der Trägheitstensor in einem aus dem Schwerpunkt um den Vektor $\vec{a}$ verschobenen Koordinatensystem durch

$$I_{ij} = I_{ij}^S + M(\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j)$$

gegeben ist. Hierbei ist I_{ij}^S der Trägheitstensor im Schwerpunktsystem und M die Gesamtmasse.

- c) Zeigen Sie, dass sich der Trägheitstensor unter Drehungen des körperfesten Koordinatensystems wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert, d.h.

$$\hat{I}_{ij} = A_{im} A_{jn} I_{mn}.$$

A ist die orthogonale Drehmatrix, deren Elemente $A_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ aus den Skalarprodukten der Basisvektoren der Koordinatensysteme gebildet werden. Bei Drehung des Koordinatensystems transformieren sich die Koordinaten eines Vektors wie $\hat{x}_i = A_{ij} x_j$.

Aufgabe 32: kräftefreie Kreisel

4 Punkte

Die Rotation eines starren Körpers wird am einfachsten durch die Euler-Gleichungen

$$I_1 \dot{\Omega}_1 - (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 = N_1 ,$$

$$I_2 \dot{\Omega}_2 - (I_3 - I_1) \Omega_3 \Omega_1 = N_2 ,$$

$$I_3 \dot{\Omega}_3 - (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2 = N_3$$

beschrieben. Hierbei sind I_i die Trägheitsmomente, Ω_i die Projektion der Winkelgeschwindigkeit auf das körperfeste Koordinatensystem und N_i die angreifenden Drehmomente. Das körperfeste Koordinatensystem wurde so gewählt, dass es mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfällt. Betrachten Sie im folgenden den Spezialfall des symmetrischen Kreisels, d.h. mit $I_1 = I_2$, ohne äussere Drehmomente, $N_i = 0$.

a) Lösen Sie die Euler-Gleichungen für diesen Spezialfall.

b) Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ hängt mit den Euler-Winkeln φ, ϑ, ψ über

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \dot{\varphi} + \cos \psi \dot{\vartheta} \\ \sin \vartheta \cos \psi \dot{\varphi} - \sin \psi \dot{\vartheta} \\ \cos \vartheta \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (1)$$

zusammen. Bestimmen Sie unter Verwendung des Ansatzes $\vartheta(t) = \vartheta_0 = \text{const}$ und mit Hilfe obigen Zusammenhangs die zeitliche Änderung der Euler-Winkel.

c) Diskutieren Sie die Ergebnisse.