Theoretische Physik II Übungsblätter

Mitschriebe ausgearbeitet von
Philipp Basler, Nils Braun, Larissa Bauer

17. Juli 2011

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)
Abgabe: Donnerstag, 21.04.2011, 11 Uhr
Besprechung: Dienstag, 26.04.2011

Aufgabe 1: Brachystochronenproblem — 5 Punkte

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für das Brachystochronenproblem das Integral

$$\int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}} dx, \quad y = y(x) \quad (g = \text{Erdbeschleunigung}) \tag{1}$$

zu minimieren ist.

a) Zeigen Sie, dass unter Verwendung der Euler'schen Gleichung die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}(y(1+y'^2)) = 0 \tag{2}$$

folgt.

b) Zeigen Sie, dass die Parametrisierung der Kurve (mit ψ als Bahnparameter)

$$x = R(\psi + \sin\psi), \quad y = R(1+\cos\psi) \tag{3}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (2) ist. Drücken Sie hierzu $y' = dy/dx$ durch $dy/d\psi$ und $dx/d\psi$ aus.

Aufgabe 2: Fermat'sches Prinzip — 5 Punkte

Gegeben sei ein optisches Medium in zwei Dimensionen mit einem Brechungsindex $n(x,y) = a/y$, $a \in \mathbb{R}$. Die Lichtgeschwindigkeit in diesem Medium ist somit $v(x,y) = c_0/n(x,y)$.

a) Zeigen Sie, dass die Laufzeit eines Lichtstrahls zwischen zwei Punkten A und B gegeben ist durch

$$T = \frac{1}{c_0}\int_A^B n(x,y)\sqrt{1+y'^2}\, dx, \quad y = y(x)\,. \tag{1}$$

Nach dem Fermat'schen Prinzip breiten sich Lichtstrahlen in einem Medium entlang einer Bahn aus, die die Laufzeit minimiert.

b) Stellen Sie mit Hilfe der Euler'schen Gleichung eine Differentialgleichung für die Bahnkurve $y(x)$ auf und lösen Sie diese.

c) Zeigen Sie, dass sich die Lichtstrahlen entlang von Kreislinien ausbreiten.

1. Aufgabe: Brachystochenproblem

(a)

$$f = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}} \implies f = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$$

Euler-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Dies ergibt

$$-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}\,[1+y'^2+2yy'']}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}y\sqrt{-gy}} = 0$$

Also :

$$1+y'^2+2yy'' = 0 \iff \frac{d}{dx}(y(1+y'^2)) = 0$$

(b) Gegeben

$$y = R(1+\cos\psi) \qquad x = R(\psi+\sin\psi)$$

$$\frac{dy}{d\psi} = -R\sin\psi \qquad \frac{dx}{d\psi} = R + R\cos\psi$$

Somit folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\psi}\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^{-1} = -\frac{R\sin\psi}{R(1+\cos\psi)}$$

Eingesetz ergibt

$$y(1+y'^2) = R(1+\cos\psi)\left(\frac{2}{1+\cos\psi}\right) = 2R$$

Damit ist

$$\frac{d}{dx}y(1+y'^2) = \frac{d}{dx}2R = 0$$

2. Aufgabe: Fermat'sches Prinzip

(a)

$$ds = vdt \implies dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}dx = \frac{1}{c_0}\int_A^B n(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx = T$$

(b)

$$f = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$$

Mit Einsetzen ergibt sich :

$$1 + y'^2 + yy'' = 0$$

Ansatz : $u(x) = y^2 \implies \frac{d}{dx}u = 2yy' \implies \frac{d^2u}{dx^2} = 2(y'^2 + yy'')$
Also ergibt sich : $\frac{d^2u}{dx^2} = -2 \implies \frac{d}{dx}u = -2x + C_1 \implies u(x) = -x^2 + C_1x + C_2$. Also

$$y(x) = \sqrt{C_2 + C_1x - x^2}$$

(c) Dies ist eine Gleichung für einen Halbkreis

Aufgabe 3: Rotationsfläche — 5 Punkte

a) Zeigen Sie, dass falls $F(y(x), y'(x), x) \equiv F(y(x), y'(x))$, d.h. F nicht explizit von x anhängt, gilt:

$$\frac{d}{dx} H(y, y') = 0,$$

wobei

$$H(y, y') = F(y, y') - y'(x) \frac{\partial}{\partial y'} F(y, y')$$

ist und F die Euler'schen Gleichungen erfüllt.

b) Leiten Sie eine Formel für die Fläche her, die durch Rotation der Kurve $(r(z), 0, z)$ mit $r(-D/2) = r(D/2) = R$ um die z-Achse entsteht.

c) Berechnen Sie unter Ausnutzung von a) die Form der Kurve $r(z)$, die die Oberfläche minimiert.

Aufgabe 4: Geodäten — 5 Punkte

Betrachten Sie die Oberfläche der Einheitskugel. Zur Parametrisierung der Kugeloberfläche verwenden wir Kugelkoordinaten

$$\vec{x}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ in Abhängigkeit von θ und ϕ.

b) Berechnen Sie das Wegelement ds, die Metrik ist gegeben durch $g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$.

c) Zeigen Sie, dass der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf der Oberfláchhe einer Kugel durch Segmente von Großkreisen gegeben ist. Finden Sie hierzu eine Differentialgleichung für $\phi(\theta)$ und wählen Sie unter Ausnutzung der Kugelsymmetrie eine geeignete Lage des Koordinatensystems.

3. Aufgabe: Rotationsfläche

(a) Da F die Euler-Gleichung erfüllt ergibt sich

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \tag{1}$$

Weiterhin gilt

$$\frac{d}{dx}F = y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\frac{\partial F}{\partial y} \tag{2}$$

Für $H = F(y, y') - y'\frac{\partial F}{\partial y'}$ ergibt sich damit :
$\frac{d}{dx}H = \frac{d}{dx}F - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y}$
(1) angewendet ergibt
$\frac{d}{dx}H = \frac{d}{dx}F - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\partial F}{\partial y}$
(2) angewandt ergibt nun

$$\frac{d}{dx}H = 0$$

(b) Für die Oberfläche bei Rotationskörpern gilt

$$dA = 2\pi r ds$$

Dies führt zu

$$A = 2\pi \int r\sqrt{1 + r'^2}dz$$

(c)

$$F = r\sqrt{1 + r'^2} \implies H = \frac{r}{\sqrt{1 + r'^2}}$$

Laut a) gilt $\frac{dH}{dz} = 0$. Also gilt für eine Konstante C :

$$\frac{r}{\sqrt{1 + r'^2}} = C$$

$$r^2 - C^2 = C^2 r'^2$$

Abgeleitet ergibt es

$$2r'(r - C^2 r'') = 0$$

Da $2r' = 0$ nicht die minimalste Lösung wäre $r = const$, gilt nun

$$r = C^2 r''$$

Also : $r(z) = c_1 e^{\frac{z}{C}} + c_2 e^{-\frac{z}{C}}$
Mit den Anfangsbedinungen $r(-\frac{D}{2}) = r(\frac{D}{2}) = R$ folgt $c_1 = c_2$
Also

$$r(z) = 2c_1 \cosh(\frac{z}{C}) = c_3 \cosh(\frac{z}{C})$$

mit $c_3 := 2c_1$ Da beim Ableitungen einer Gleichung zusätzliche Lösungen entstehen, muss $r(z)$ wieder in die Ursrprungsgleichung $r^2 - C^2 = C^2 r'^2$ eingesetzt werden. Zusammen mit den Startbedingungen ergibt dies

$$c_3 = C = \frac{R}{\cosh(\frac{D}{C})}$$

4. Aufgabe: Geodäten

(a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ Für die Einheitsvektoren ergibt sich :

$$\vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta}}{|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta}|} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi}}{|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi}|} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Für das Weglement ds gilt

$$d\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial k_i} dk_i$$

Hier also

$$d\vec{s} = \vec{e}_\theta d\theta + \vec{e}_\phi \cos\theta d\phi$$

$$ds = |d\vec{s}| = \sqrt{(d\theta)^2 + \cos^2(\theta)(d\phi)^2}$$

(c) Es sei nun $\phi(\theta) =: \phi$, $\frac{d\phi}{d\theta} =: \phi'$
Für den kürzesten Weg gilt : $s = \int ds = \int \sqrt{1 + \cos^2(\theta)\phi'^2} d\theta$ Also dient als Funktional

für die Euler-Gleichung :

$$F(\phi, \phi', \theta) = \sqrt{1 + \cos^2(\theta)\phi'^2}$$

Die Euler-Gleichung angewandt ergibt

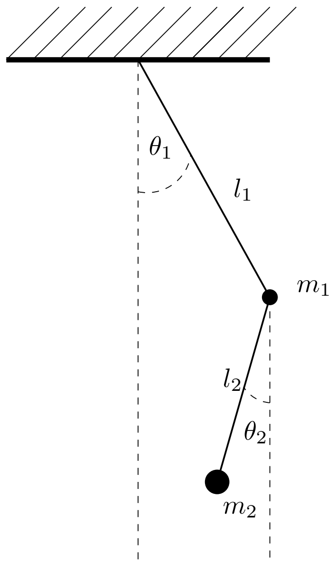
$$\frac{\cos^2\theta\phi'}{\sqrt{1 + \cos^2(\theta)\phi'^2}} = C$$

Betrachte nun $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ dann gilt $\cos\theta_0 = 0 \implies C = 0$.
Da $C = 0$ überall gilt, folgt also dass $\phi' = 0$ sein muss. Wähle nun das Koordinatensystem so, dass $\phi(\frac{\pi}{2}) = 0 \implies \phi \equiv 0$

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik) — Abgabe: Montag, 09.05.2011, 11 Uhr
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik) — Besprechung: Dienstag, 10.05.2011

Aufgabe 5: Doppelpendel — 5 Punkte

Betrachten Sie das ebene Doppelpendel mit den verallgemeinerten Koordinaten θ_1 und θ_2 mit Massen und Längen wie in nebestehender Abbildung. Die Massen befinden sich im homogenen Gravitationsfeld.



a) Drücken Sie die Position der Massen m_1 und m_2 durch die verallgemeinerten Koordinaten aus.

b) Bestimmen Sie potentielle und kinetische Energie, U und T, des Systems und stellen Sie die Lagragefunktion

$$L = T - U$$

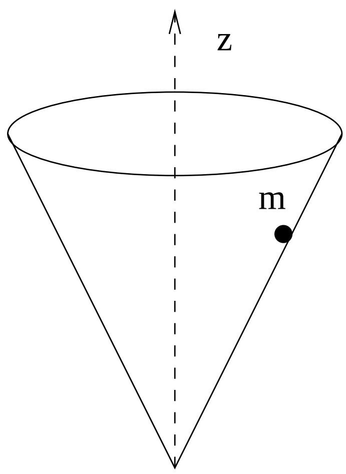
auf.

c) Leiten Sie für $l_1 = l_2 = l$ und $m_1 = m_2 = m$ die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage ($\theta_1, \theta_2 \ll 1$) her.

d) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen. Machen Sie hierzu den Ansatz $\theta_i = a_i \cos \omega t$ und lösen Sie das resultierende Gleichungssystem. Hinweis: Bestimmen Sie zunächst ω so, daß das Gleichungssystem lösbar ist.

Aufgabe 6: Hohlkegel — 3 Punkte

Betrachten Sie eine Punktmasse mit Masse m, die sich auf der Innenseite eines Hohlkegels mit Öffnungswinkel α reibungsfrei im Schwerefeld bewegen kann.



a) Finden Sie geeignete generalisierte Koordinaten und drücken Sie die Lage des Massenpunktes durch diese Koordinaten aus.

b) Berechnen Sie potentielle und kinetische Energie, U und T, und stellen sie die Lagragefunktion L auf.

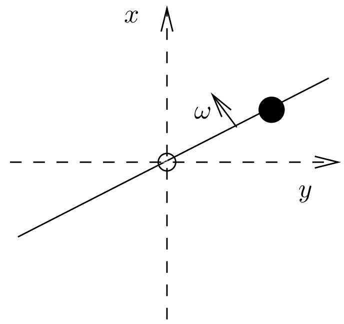
c) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her. Gibt es eine zyklische Variable und was ist die damit verbundene Erhaltungsgröße?

(bitte wenden)

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)

Abgabe: Montag, 09.05.2011, 11 Uhr
Besprechung: Dienstag, 10.05.2011

Aufgabe 7: Perle auf Draht — 2 Punkte



Betrachten Sie eine sich auf einem mit Winkelgeschwindigkeit ω rotierenen Draht reibungslos bewegende Perle mit Masse m.

a) Führen Sie geeignete generalisierte Koordinaten ein und stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her und lösen Sie sie.

5. Aufgabe: Doppelpendel

(a)

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \sin(\theta_1) \\ l_1 \cos(\theta_1) \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2) \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathcal{L} = T - U = \sum_i m_i \left(\frac{1}{2} v_i + g(\vec{r}_i)_2 \right)$$

$$v_1^2 = \dot{\theta}_1^2 l_1^2$$

Mit $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$ folgt

$$v_2^2 = \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 - 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

Insgesamt ergibt sich also :

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1 \left(\dot{\theta}_1^2 l_1 + 2g\cos(\theta_1) \right) + m_2 l_2 \left(\frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 l_2 + l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + g\cos(\theta_2) \right)$$

(c) Im folgenden Fall sei nun $l_1 = l_2 = l$ und $m_1 = m_2 = m$. Daraus ergibt sich

$$\mathcal{L} = ml \left[\dot{\theta}_1^2 l + 2g\cos(\theta_1) + \frac{1}{2} l \dot{\theta}_2^2 + l\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + g\cos(\theta_2) \right]$$

Mit der Euler-Lagrange-Gleichung ergibt sich folgendes Gleichungssystem :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}$$

Angewandt ergeben sich die Gleichungen

$$2g\sin\theta_1 + 2l\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 l \cos(\theta_1 + \theta_2) - l\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0$$
$$g\sin\theta_2 + \ddot{\theta}_2 l + \ddot{\theta}_1 l \cos(\theta_1 + \theta_2) - l\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

Für $\theta_i << 1$ gilt : $\sin\theta_i \approx \theta_i, \cos\theta_i \approx 1, \dot{\theta}_i^2\theta_j \approx 0$
Damit ergibt sich :

$$
\begin{aligned}
2g\theta_1 + 2l\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 l = 0 \\
g\theta_2 + \ddot{\theta}_2 l + \ddot{\theta}_1 l = 0
\end{aligned}
$$

(d) Sei nun $\theta_i = a_i\cos(\omega t), \ddot{\theta}_i = -a_i\omega^2\cos(\omega t)$
Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\cos(\omega t)\left(2ga_1 - 2la_1\omega^2 - a_2 l\omega^2\right) = 0 \\
\cos(\omega t)\left(ga_2 - a_2\omega^2 l - la_1\omega^2\right) = 0
\end{aligned}
$$

Da $\cos(\omega t) = 0$ keine Lösung ist, reduziert sich die Gleichung auf

$$
A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Wobei

$$
A = \begin{pmatrix} 2(g - l\omega^2) & -l\omega^2 \\ -l\omega^2 & g - l\omega^2 \end{pmatrix}
$$

Damit es eine nichttriaviale Lösung gibt, muss die Determinante der Matrix 0 sein

$$
\det A = 0 \implies \omega_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{(2 \pm \sqrt{2})g}{l}}
$$

1. Fall $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})g}{l}} \implies a_1 = k \in \mathbb{R}, a_2 = -\sqrt{2}k$
2. Fall $\omega_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})g}{l}} \implies a_1 = k \in \mathbb{R}, a_2 = \sqrt{2}k$

6. Aufgabe: Hohlkegel

(a) Wir wählen Zylinderkoordinaten :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$$

Mit $\tan(\alpha) = \frac{r}{z}$ folgt

$$\vec{r} = z \begin{pmatrix} \tan(\alpha)\cos(\phi) \\ \tan(\alpha)\sin(\phi) \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\vec{v}^2 = \dot{z}^2(1+\tan^2(\alpha)) + z^2\dot{\phi}^2\tan^2(\alpha)$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - mgz$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left[\dot{z}^2(1+\tan^2(\alpha) + z^2\dot{\phi}^2\tan^2(\alpha) - 2gz\right]$$

(c)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$$

Dies ergibt :

$$-2g + 2z\dot{\phi}^2\tan^2(\alpha) = 2\ddot{z}(1+\tan^2(\alpha))$$
$$\frac{d}{dt}mz^2\tan^2(\alpha)\dot{\phi} = \frac{d}{dt}mr^2\dot{\phi} = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, dass ϕ eine zyklische Variable ist ($\mathcal{L}$ hängt nicht von ϕ ab, aber von $\dot{\phi}$) und dass Drehimpulserhaltung gilt.

7. Aufgabe: Perle auf Draht

(a)

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$
Die Bewegung läuft in der x-y-Ebene ab, also ist die Potentielle Energie 0

$$\mathcal{L} = T - U = T \implies \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right)$$

(b)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

Dies führt zu

$$r\dot{\phi}^2 = \ddot{r}$$
$$C = mr^2\dot{\phi}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt Drehimpulserhaltung
Mit $\dot{\phi} = \omega$ folgt :

$$r(t) = c_1\cosh(\omega t) + c_2\sinh(\omega t)$$

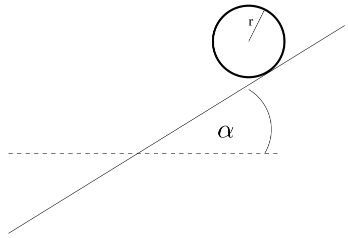
ÜBUNGEN ZUR KLASSISCHEN THEORETISCHEN PHYSIK II — BLATT 4

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik) — Abgabe: Montag, 16.05.2011, 11 Uhr

Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik) — Besprechung: Dienstag, 17.05.2011

Aufgabe 8: rollender Zylinder — 2 Punkte

Betrachten Sie einen Hohlzylinder mit Radius r, Länge L und Masse m, der auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α ohne Schlupf im Graviationsfeld der Erde rollt.



a) Stellen Sie die Lagrangegleichung und die Bewegungsgleichung auf.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung.

Aufgabe 9: Kugelschale — 3 Punkte

Betrachten Sie die Bewegung eines Massenpunktes mit Masse m auf der Innenseite einer Kugelschale mit Radius R unter Einfluss der Gravitation.

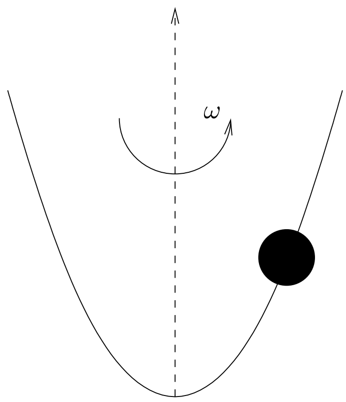
a) Finden Sie geeignete generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her. Gibt es eine zyklische Variable? Was ist die zugehörigen Erhaltungsgröße?

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen in Integalform.

Aufgabe 10: rotierender Draht — 2 Punkte

Betrachten Sie eine Kugel mit Masse m, die reibungslos unter Einfluss der Erdanziehung auf einem um die z-Achse mit Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Draht mit der Form $z = ar^2$ gleiten kann.

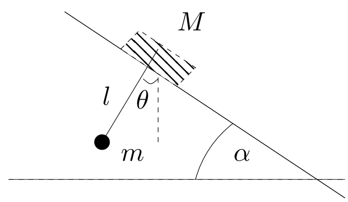


a) Wählen Sie geeignete Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichung her und bestimmen Sie die Gleichgewichtslage. Was passiert für den Fall $\omega^2 = 2ag$? Geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichung in Integralform an.

Aufgabe 11: Seilbahn — 3 Punkte

Betrachten Sie einen Quader mit Masse M, der eine schiefe Ebene mit Neigung α unter Einfluss der Gravitation reibungslos herunter gleitet. An dem Quader sei ein Fadenpendel mit Fadenlänge l und Masse m befestigt.



a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her und zeigen Sie, dass $\theta = \theta_0$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist und bestimmen Sie θ_0.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für θ für $M \gg m$ und kleine Auslenkungen aus der Ruhelage.

8. Aufgabe: Rollender Zylinder

Korrektur :

(a) $\vec{r} = s\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} = r\varphi\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$
Damit ergibt sich

$$\mathcal{L} = mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr\varphi\sin\alpha$$

x-Achse nach links, y-Achse nach unten

TODO

(a) Für einen rollenden Zylinder gilt :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2$$

Da der Zylinder rollt und nicht gleitet gilt die Zwangsbedingung

$$v = \omega R$$

Ebenfalls gilt beim Hohlzylinder $\theta = mR^2$ Also :

$$T = m\dot{x}^2$$

Für die Höhe mit Anfangshöhe $h_0 = l\sin(\alpha)$ gilt

$$U = mg(l - x)\sin(\alpha)$$

Also ergibt sich die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = m\dot{x}^2 - mg(l - x)\sin(\alpha)$$

Mit

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}$$

ergibt sich

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}g\sin(\alpha)$$

(b)

$$x(t) = c_2 + c_1 \cdot t + \frac{1}{4} g \sin(\alpha) t^2$$

9. Aufgabe: Kugelschale

(a) Wähle als Ortsvektor :

$$\vec{r} = R \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$v^2 = R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2\theta)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2\theta) + mgR\sin\theta$$

(b) Da $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$, ist ϕ eine zyklische Variable.
Lagrange-Gleichungen angewandt ergibt

$$mR^2\cos^2(\theta)\dot{\phi} = L_z$$
$$\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\dot{\phi}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta = 0$$

Verwende erste Gleichung :
Betrachte Drehimpuls : $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = mR\vec{e}_r \times (R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + R\cos\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi) = m(R^2\dot{\theta}\vec{e}_\phi - R^2\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\theta) \implies L_z = mR^2\cos^2\theta\dot{\phi}$

(c) Aus der ersten Gleichung ergibt sich $\dot{\phi} = \frac{L_z}{mR^2\cos^2(\theta)}$
Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt dies

$$\ddot{\theta} = -\frac{L_z^2 \sin\theta}{m^2R^2\cos^3(\theta)} + \frac{g}{R}\cos\theta$$

Mit $\dot{\theta}$ durchmultipliziert und $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}\ddot{\theta}$ folgt

$$\dot{\theta}^2 = 2\int \dot{\theta}\left(\frac{g}{R}\cos\theta - \frac{L_z^2}{m^2R^4}\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\right) dt$$

Daraus ergibt sich

$$\int dt = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2\int \dot\theta \left(\frac{g}{R}\cos\theta - \frac{L_z^2}{m^2R^4}\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\right) dt}} + C_1$$

Kürze nun $\dot\theta dt$ zu $d\theta$

$$\int dt = \int \frac{d\theta}{\sqrt{2\int \left(\frac{g}{R}\cos\theta - \frac{L_z^2}{m^2R^4}\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\right) d\theta}} + C_1$$

Zusatz:
$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\dot\theta^2 = \dot\theta\ddot\theta$, $\frac{d}{dt}\frac{1}{2\cos^2\theta} = -\dot\theta\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}$, $\frac{d}{dt} sin\theta = \dot\theta\cos\theta$
Damit ergibt sich

$$\dot\theta = \sqrt{2}\sqrt{\frac{L_z^2}{2m^2R^4\cos^2\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta + C_1}$$

Also

$$\int dt = \int \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{L_z^2}{2m^2R^4\cos^2\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta + C_1}} d\theta + C_2$$

10. Aufgabe: Rotierender Draht

(a) Für den Ortsvektor im Intertialsystem gilt :

$$\vec{r}_{IS} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ ar^2 \end{pmatrix}$$

Um aus dem Intertialsystem zum Versuch zu kommen, muss mit einer Drehmatrix multipliziert werden.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ ar^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) r \\ \cos(\omega t) r \\ ar^2 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich dann für die Langrage-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - mgz = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 + 4a^2r^2\dot{r}^2) - mgar^2$$

(b)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\omega^2 + 4ma^2\dot{r}^2 r - 2mgar$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\left(1 + 4a^2r^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\left(\ddot{r} + 8a^2r\dot{r}^2 + 4a^2r^2\ddot{r}\right)$$

Also ergibt sich als Gleichung

$$-4a^2\dot{r}^2r - 4a^2r^2\ddot{r} - \ddot{r} + r\omega^2 - 2gar = 0$$

Die Gleichgewichtslage ist äquivalent zum Extremum des Potentials $U = mgar^2$. Dies ist erreicht bei $r = 0$ oder $\dot{r} = 0$.

Falls $\dot{r} = 0$, so ist $\ddot{r} = 0$, falls sich die Perle dauerhaft in der Gleichgewichtslage befinden soll.

Damit ergibt sich für den Fall $\omega^2 = 2ag$, dass das Teilchen an jedem Punkt in der Gleichgewichtslage verharrt.

Allgemein:

$\ddot{r} + 2a^2(2\dot{r}^2r + 2r^2\ddot{r}) - r(\omega^2 - 2ga) = 0$

Einmal mit $\dot{r}$ multiplizieren und einmalig integrieren ergibt :

$$\dot{r}^2 + 4a^2(\dot{r}^2r^2) - r^2(\omega^2 - 2ga) = C$$

Umgeformt ergibt dies

$$\int \sqrt{\frac{1 + 4a^2r^2}{r^2(\omega^2 - 2ga) + C}}dr = \int dt$$

11. Aufgabe: Seilbahn

Lege $x-$Achse nach links und $y-$Achse nach oben

(a) Wähle $\vec{r}_1 = R\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$

$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} R\cos\alpha + l\sin\theta \\ R\sin\alpha - l\cos\theta \end{pmatrix}$ Für die kinetische Energie ergibt sich :

$$T = \frac{1}{2}\dot{R}^2(M+m) + \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{R}l\dot{\theta}\cos(\alpha-\theta)\right)$$

$$U = (M+m)gR\sin\alpha - mgl\cos\theta$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{R}^2(M+m) + \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{R}l\dot{\theta}\cos(\alpha-\theta)\right) - (M+m)gR\sin\alpha + mgl\cos\theta$$

(b)

$$\ddot{R}(M+m) + ml(\ddot{\theta}\cos(\alpha-\theta) + \dot{\theta}^2\sin(\alpha-\theta) = -(M+m)g\sin\alpha$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{R}\cos(\alpha-\theta) = \dot{R}\dot{\theta}\sin(\alpha-\theta) - g\sin\theta$$

Nun sei $\theta = \theta_0 \implies \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

Also werden die zwei Gleichungen zu

$$\ddot{R} = -g\sin\alpha$$

$$\ddot{R}\cos(\alpha-\theta_0) = -g\sin\theta_0$$

Die erste Gleichung in die zweite eingesetzt und Additionstheorem angewandt ergibt sich :

$$\sin\alpha(\cos\alpha\cos\theta_0 + \sin\alpha\sin\theta_0) = \sin\theta_0$$

Nach umformen ergibt sich

$$\tan\theta_0 = \tan\alpha \implies \alpha = \theta_0$$

(c) $M >> m \implies \frac{m}{M} << 1$

Gleichung 1 liefert dann $\ddot{R} = -g\sin\alpha - \frac{m}{m+M}l(\ddot{\theta}\cos(\theta-\alpha) - \dot{\theta}^2\sin(\theta-\alpha))$

Gleichung 2 :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}(\sin\theta - \sin\alpha\cos(\theta-\alpha)) + \underbrace{\frac{\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}(\ddot{\theta}\cos^2(\theta-\alpha) - \dot{\theta}^2\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha))}_{\approx 0}$$

Verwende (Taylor um α) $\frac{\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}} \approx 0 + \frac{m}{M}$ und $\theta - \alpha << 1$

$\sin\theta \approx \sin\alpha + \cos\alpha(\theta-\alpha), \cos(\theta-\alpha) \approx 1$

Also ergibt sich als Gleichung

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \sin \alpha$$

TODO : Lösung

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)

Abgabe: Montag, 23.05.2011, 11 Uhr
Besprechung: Dienstag, 24.05.2011

Aufgabe 12: Eichinvarianz der Lagrangefunktion — 2 Punkte

Zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichungen bei einer Änderung der Lagrangefunktion,

$$L \to L' = L + \frac{d}{dt} f(x(t), t) \,,$$

nicht ändern.

Aufgabe 13: Homogene Funktionen — 3 Punkte

Betrachten Sie ein N-Teilchensystem mit k zeitunabhängigen Zwangsbedingungen. Die Koordinaten $\vec{r}_i$ lassen sich dann durch $3N-k$ generalisierte Koordinaten q_i ausdrücken:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_{3N-k}), \quad i = 1, \ldots, N.$$

a) Zeigen Sie, dass sich die kinetische Energie schreiben lässt als

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} = \sum_{i,j=1}^{3N-k} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \,,$$

wobei die a_{ij} nicht von den Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ abhängen.

b) Sei $F(x_1, \ldots, x_m)$ eine homogene Funktion from Grad n, d.h. eine Funktion, für die

$$F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m) = \lambda^n F(x_1, \ldots, x_m)$$

gilt. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = nF$$

gilt.

c) Zeigen Sie, dass dann für die kinetische Energie T

$$\sum_{i=1}^{3N-k} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

gilt.

Aufgabe 14: Mechanische Ähnlichkeit — 2 Punkte

Zeigen Sie mit Hilfe der mechanischen Ähnlichkeit, dass

a) in einem homogenen Kraftfeld sich die Quadrate der Fallzeiten wie die Fallhöhen verhalten.

b) in einem Newton'schen Potential sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die Kuben der Abstände verhalten.

(bitte wenden)

Aufgabe 15: Erhaltungsgrößen 3 Punkte

Betrachten Sie ein abgeschlossenes N-Teilchensystem mit Lagrangefunktion

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i<j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \,.$$

Zeigen Sie, dass Invarianz der Lagrangefunktion unter

a) zeitlicher Translation zur Energieerhaltung führt.

b) Drehungen zur Drehimpulserhaltung führt.

c) räumlichen Translationen zur Impulserhaltung führt.

12. Aufgabe: Eichinvarianz der Lagrangefunktion

f darf nicht von $\dot{x}$ abhängen. Beweis:
Wähle $f = \dot{x}^2 \implies \frac{d}{dt} f = 2\dot{x}\ddot{x}$
Lagrange 2 angewandt ergibt

$$\ddot{x} = const$$

Dies würde konstante Beschleunigungen bedeuten, was z.B. mit einer einfachen Schwingung widerlegt ist.

Richtige Version: $f(x(t), t)$

$$\int L' dt = \int L dt + \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} f(x(t), t) dt \implies \int L dt + f(B, t_B) - f(A, t_A)$$

Der letzte Term ist eine Konstante , die nur von dem Start und Endwert abhängt. Dies entspricht einfach nur einer Verschiebung der Achsen.
Variante 2:
$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{d}{dt} f - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt} f = 0$
Betrachte nun $\frac{d}{dt} f = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t}$
$\frac{\partial}{\partial x}\frac{d}{dt} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$
$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt} f = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{d}{dt} f$
Also ergeben sich unter $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ die gleichen Bewegungsgleichungen.

13. Aufgabe: Homogene Funktion

(a) $\dot{\vec{r}}_i^2 = \left(\sum_{k=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)^2 = \left(\sum_{l=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_l\right)\left(\sum_{k=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = \sum_{k,l=1}^{3N-k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l$

Definiere nun $a_{kl} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}$

Damit ist :

$$T = \sum_{k,l=1}^{3N-k} a_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l$$

(b) $\frac{dF}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \lambda x_i} x_i$

$\frac{d\lambda^n F}{d\lambda} = n\lambda^{n-1}F$ Also

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m)}{\partial \lambda x_i} x_i = n\lambda^{n-1} F(x_1, \ldots, x_m)$$

Wähle nun $\lambda = 1$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i = nF$$

(c) a) $\implies T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{k,l=1}^{3N-k} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$

Betrachte nun $T(\lambda \dot{q}_1, \ldots, \lambda \dot{q}_{3N-k}) = \sum_{k,l=1}^{3N-k} a_{kl} \lambda \dot{q}_k \lambda \dot{q}_l = \lambda^2 T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{3N-k}) \implies n = 2$

Mit b) folgt nun

$$\sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

14. Aufgabe: Mechanische Ähnlichkeit

Unter mechanischer Ähnlichkeit , falls U eine homogene Funktion vom Grad k ist, gilt unter der Transformation $h \to h^\star = \alpha h, t \to t^\star = \alpha^{1-\frac{k}{2}} t$. Falls $\vec{r}_i(t)$ eine Lösung ist, so auch $\alpha \vec{r}_i(\alpha^{1-\frac{k}{2}} t)$

(a) $U = -\int \vec{F} d\vec{r}$, mit konstantem $\vec{F}$ (homogen) folgt $U = -\vec{F}\vec{r} = -F_x r_x - F_y r_y - F_z r_z$. Also ist U eine homogene Funktion vom Grade $k = 1$.

Unter mechanischer Ähnlichkeit gilt unter der Transformation $h \to h^\star = \alpha h, t \to t^\star = \alpha^{1-\frac{k}{2}} t = \alpha^{\frac{1}{2}} t$

Somit ergibt sich

$$\alpha = \left(\frac{t^\star}{t}\right)^2 = \frac{h^\star}{h}$$

Wobei $h^\star = \vec{r}_z^\star = \alpha \vec{r}_z = \alpha h$.

(b) Im Newton'schen Potential gilt $U = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{m_i m_j G}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$ und somit ist U eine homogene Funktion vom Grad $k = -1$. Damit ergibt sich für $d = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ unter $d \to d^\star = |\vec{r}_i^\star - \vec{r}_j^\star| = \alpha |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \alpha d, t \to t^\star = \alpha^{1-\frac{k}{2}} t = \alpha^{\frac{3}{2}} t$

Somit ergibt sich $\alpha = \left(\frac{t^\star}{t}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{d^\star}{d}$ und damit

$$\left(\frac{t^\star}{t}\right)^2 = \left(\frac{d^\star}{d}\right)^3$$

15. Aufgabe: Erhaltungsgrößen

Variante 1 Vorwort :

Falls $\mathcal{L}$ transformationsinvariant ist, so muss gelten

$$\mathcal{L}(q_k + \delta q_k, \dot{q}_k) = \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k)$$

Einmal getaylort ergibt sich

$$\mathcal{L}(q_k + \delta q_k, \dot{q}_k) = \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k) + \sum_{k=1}^{N} \delta q_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

Womit sich ergibt

$$\sum_{k=1}^{N} \delta q_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \overset{LagrangeII}{=} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} \delta q_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{3}$$

(a) Betrachte nun Zeitliche Invarianz $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(t+\varepsilon) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\varepsilon$
Also muss $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ sein , da $\varepsilon \neq 0$
Falls $\frac{d\mathcal{L}}{dt} = 0$, so ist auch $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$
$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i}\dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\ddot{\vec{r}}_i$
Mit $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i}$ und Produktregel ergibt sich

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\dot{\vec{r}}_i$$

Betrachte nun $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_i}$
Mit Satz von Euler ergibt sich $\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\dot{\vec{r}}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\dot{\vec{r}} = 2T$

Eingesetzt in obige Gleichung ergibt :

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathcal{L} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \dot{\vec{r}}_i) = \frac{d}{dt}(T - U - 2T) \implies T + U = const$$

(b) Betrachte nun Drehinvarianz
Wähle $\delta \vec{q}_k = \delta \vec{\phi} \times \vec{r}$ (Drehung des Systems mit $\vec{\phi}$
Verwende nun (3) $\implies \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} (\vec{\phi} \times \vec{r}_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0$
Mit $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ und $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \dot{\vec{r}}_i = m \vec{r}_i = \vec{p}_i$, sowie $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{\phi} \cdot \vec{L}_i = 0$$

Dies ist Drehimpulserhaltung in $\vec{\phi}$ Richtung, da dies nicht näher festgelegt wurde, gilt also Drehimpulserhaltung in allen Richtungen

(c) Betrachte konstantes $\vec{\varepsilon} = \delta q_k$
$\vec{r} \to \vec{r} + \vec{\varepsilon}, \dot{\vec{r}} \to \dot{\vec{r}}$
$V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \to V_{ij}(|\vec{r}_i + \vec{\varepsilon} - \vec{r}_j - \vec{\varepsilon}|) = V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$
$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \to \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$
Verwende nun $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \vec{p}_i$ und (3)

$$\implies \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{\varepsilon} \cdot \vec{p}_i = 0$$

Also Impulserhaltung in $\vec{\varepsilon}$ Richtung

Variante 2 Benutze Noethertheorem :

Noethertheorem
Falls $S[q_i(t)] = S[q_i^\star(t^\star)]$ mit

$$T : \begin{pmatrix} q_i \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} q_i^\star = q_i + \varepsilon \psi(q_i, \dot{q}_i, t) \\ t^\star = t + \varepsilon \varphi(q_i, \dot{q}_i, t) \end{pmatrix}$$

, dann nennen wir S invariant unter T. Es liegt eine Symmetrie vor $\implies$ Es gibt eine Erhaltungsgröße Q mit

$$Q(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \psi_i \right) + \left(\mathcal{L} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \varphi$$

und

$$\frac{d}{dt} Q = 0$$

(a) Zeitinvarianz $\implies \psi = 0, \varphi = 1$
$Q = \mathcal{L} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \dot{\vec{r}}_i$
Laut Eulertheorem ist $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \dot{\vec{r}}_i = 2T$
Somit ist $Q = T - U - 2T = -(T+U)$, also ist nach Noethertheorem $\frac{d}{dt}(T+U) = \frac{d}{dt} E = 0 \implies$ Energieerhaltung

(b) Drehinvarianz $\implies \varphi = 0, \vec{\psi}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$
$Q = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$
Mit $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \vec{p}_i$, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ sowie $\vec{p} \times \vec{r} = -\vec{L}$ folgt
$Q = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \cdot \vec{\omega} = \vec{L}_{Ges} \cdot \vec{\omega}$
Mit $\frac{d}{dt} Q = 0$ folgt also Drehimpulserhaltung in $\vec{\omega}$ Richtung, somit in alle Richtungen

(c) Räumliche Translation $\implies \vec{\psi} = \vec{e}_k, k \in \{1, 2, 3\}, \varphi = 0$
$Q = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \vec{e}_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \cdot \vec{e}_k = \vec{p}_{ges} \cdot \vec{e}_k$
Mit $\frac{d}{dt} Q = \frac{d}{dt} (\vec{p}_{ges} \cdot \vec{e}_k) = 0$ folgt also Impulserhaltung in $\vec{e}_k$ Richtung. Da dies nicht genauer festgelegt worden ist, folgt also Impulserhaltung in alle Richtungen.

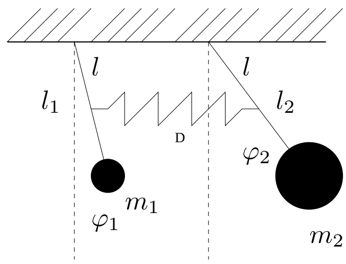
Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)

Abgabe: Montag, 30.05.2011, 11 Uhr
Besprechung: Dienstag, 31.05.2011

Wichtig: Melden Sie sich im Studierendenportal bis zum **03.06.2011** für die Vorleistungen an. Falls Sie sich nicht im Studierendenportal anmelden können aber dennoch an der Probeklausur teilnehmen müssen/wollen, melden Sie sich bitte per E-mail (peter.marquard@kit.edu) an.

Aufgabe 16: Gekoppelte Pendel 4 Punkte

Betrachten Sie zwei gekoppelte Pendel wie in nebenstehender Abbildung. Die Feder habe die Federkonstante D und sei im Abstand l befestigt. Die Ruhelage ist $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.



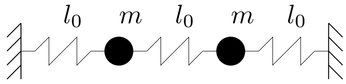
a) Stellen Sie die Lagrangegleichung und die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage auf.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für den Fall $m_1 = m_2 = m$ und $l_1 = l_2 = l_0$. Berechnen Sie hierzu die Fundamentalschwingungen und geben Sie die allgemeinste Lösung an. Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangsbedingungen $\varphi_1(0) = \varphi_0$, $\varphi_2(0) = \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$. Diskutieren Sie das zeitliche Verhalten der Lösung.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für den Fall $m_1 \neq m_2$ und $l_1 = l_2 = l_0$. Berechnen Sie hierzu die Fundamentalschwingungen und geben Sie die allgemeinste Lösung an. Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangsbedingungen $\varphi_1(0) = \varphi_0$, $\varphi_2(0) = \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$. Diskutieren Sie das zeitliche Verhalten der Lösung. Worin unterscheidet sich die Lösung von Teil b)?

Aufgabe 17: Federkette 3 Punkte

Betrachten Sie eine Federkette bestehend aus drei Federn (Federkonstante D) und zwei Massen (Masse m) wie in der nebenstehenden Abbildung. Die Federn seien mit der Kraft F vorgespannt. Der Abstand zwischen den Massen und von der Wand betrage jeweils l_0.



a) Betrachten Sie nur longitudinale Auslenkungen. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

b) Betrachten Sie nur transversale Auslenkungen in der Ebene. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen aus a) und b) und geben Sie die allgemeinste Lösung an.

(bitte wenden)

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)
Abgabe: Montag, 30.05.2011, 11 Uhr
Besprechung: Dienstag, 31.05.2011

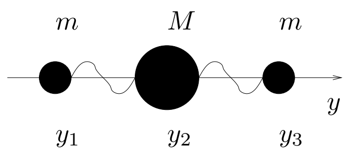
Aufgabe 18: dreiatomiges Molekül 3 Punkte

Betrachten Sie ein lineares dreiatomiges Molekül, dessen Atome wie in der Abbildung angeordnet sind. Die Atome befinden sich in der Gleichgewichtslage im Abstand b:

$$y_2^0 - y_1^0 = y_3^0 - y_2^0 = b\,.$$

Das Wechselwirkungspotential habe die Form:

$$V(y_1, y_2, y_3) = \frac{k}{2}\left[(y_2 - y_1 - b)^2 + (y_3 - y_2 - b)^2\right]\,.$$



a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf. Verwenden Sie hierbei die Koordinaten $x_i = y_i - y_i^0$.

b) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.

c) Bestimmen Sie die Transformation auf Normalkoordinaten.

d) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung der Bewegungsgleichungen.

16. Aufgabe: Gekoppelte Pendel

(a) $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i l_i^2 \dot{\varphi}_i^2, U = \frac{1}{2}Dl^2(\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2))^2 - \sum_{i=1}^{2} m_i g l_i \cos(\varphi_i)$
Also ergibt sich für die Lagrange Funktion :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i l_i^2 \dot{\varphi}_i^2 - \frac{1}{2}Dl^2(\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2))^2 + \sum_{i=1}^{2} m_i g l_i \cos(\varphi_i)$$

Damit ergeben sich folgende zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + Dl^2(\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2))\cos(\varphi_1) + m_1 g l_1 \sin(\varphi_1) = 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 - Dl^2(\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2))\cos(\varphi_2) + m_2 g l_2 \sin(\varphi_2) = 0 \end{aligned}$$

Genähert für kleine Auslenkungen um die Ruhelage ergibt sich zusätzlich $\sin(x) \approx x$ und $\cos(x) \approx 1$. Also

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + Dl^2(\varphi_1 - \varphi_2) + m_1 g l_1 \varphi_1 = 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 - Dl^2(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 g l_2 \varphi_2 = 0 \end{aligned}$$

(b) Nun soll $m_1 = m_2 = m$ und $l_1 = l_2 = l_0$ sein. Damit vereinfachen sich die Gleichungen auf

$$\begin{aligned} ml_0(l_0\ddot{\varphi}_1 + g\varphi_1) + Dl^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ ml_0(l_0\ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2) - Dl^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \end{aligned}$$

Betrachtet man nun $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \ddot{\varphi} = \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix}, M = ml_0^2 \cdot \mathbb{1}, K = \begin{pmatrix} mgl_0 + Dl^2 & -Dl^2 \\ -Dl^2 & mgl_0 + Dl^2 \end{pmatrix}$
so lässt sich das Gleichungssystem schreiben als

$$M\ddot{\varphi} + K\varphi = 0$$

Betrachtet man nun als Lösungsansatz $\varphi(t) = Ae^{i\omega t}$, so ergibt sich die Gleichung

$$(K - \omega^2 M)Ae^{i\omega t} = 0$$

Damit dieses System nicht triviale Lösungen hat, so muss $\det(K - \omega^2 M) = 0$ sein.
Daraus ergibt sich $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l_0}}, \omega_{3,4} = \pm\frac{1}{l_0}\sqrt{\frac{mgl_0+2Dl^2}{m}} = \pm\sqrt{\frac{g}{l_0} + 2\frac{Dl^2}{ml_0^2}}$
Für $\omega = \omega_{1,2}$ ist $\varphi(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$
Für $\omega = \omega_{3,4}$ ist $\varphi(t) = C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$
Also ergibt sich

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_{11}\cos(\omega_1 t) + C_{12}\sin(\omega_1 t)) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_{21}\cos(\omega_3 t) + C_{22}\sin(\omega_3 t))$$

Wobei $\omega_3 = \sqrt{\frac{g}{l_0} + 2\frac{Dl^2}{ml_0^2}},\ \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$
Betrachte nun die Anfangsbedingungen $\varphi_1(0) = \varphi_0, \varphi_2(0) = \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$
Betrachte hierzu

$$\dot{\varphi} = \omega_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (-C_{11}\sin(\omega_1 t) + C_{12}\cos(\omega_1 t)) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \omega_3 (-C_{21}\sin(\omega_3 t) + C_{22}\cos(\omega_3 t))$$

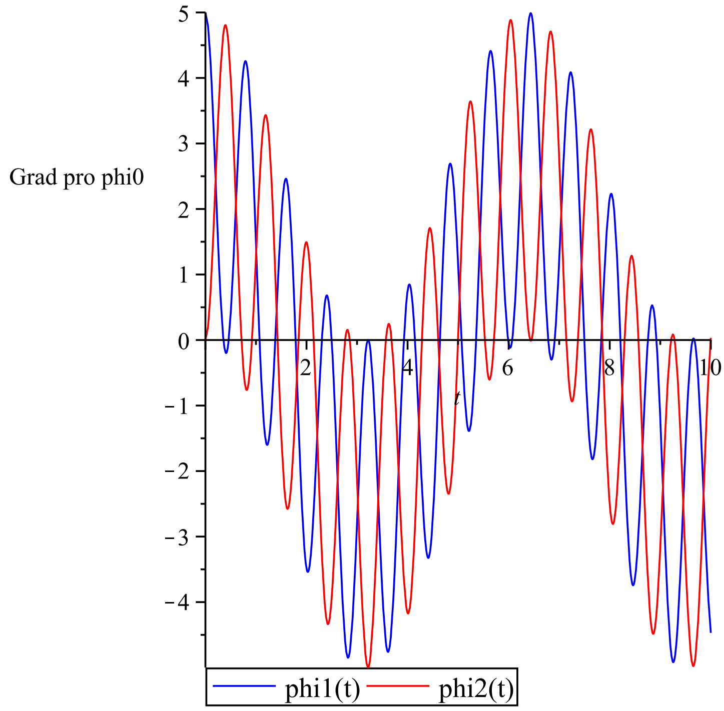
Damit folgt

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{2}\varphi_0 \\ C_{12} &= 0 \\ C_{21} &= -\frac{1}{2}\varphi_0 \\ C_{22} &= 0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{2}\varphi_0\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2}\varphi_0\cos(\omega_3 t) \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{2}\varphi_0\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{2}\varphi_0\cos(\omega_3 t) \end{aligned}$$

Während die Fundamentallösungen Schwingungen mit konstanter Amplitude sind, verhalten sich die Allgemeinen Lösungen eher folgendermaßen



(c) Nun soll im Unterschied zu Teilaufgabe b) $m_1 \neq m_2$ sein, damit ändert sich die Matrix M zu $M = \begin{pmatrix} m_1 l_0^2 & 0 \\ 0 & m_2 l_0^2 \end{pmatrix}$ und K zu $K = \begin{pmatrix} m_1 g l_0 + Dl^2 & -Dl^2 \\ -Dl^2 & m_2 g l_0 + Dl^2 \end{pmatrix}$

Die Eigenfrequenzen verändern sich dann zu $\omega_1^2 = \frac{g}{l_0}, \omega_3^2 = \frac{g}{l_0} + D\frac{l^2}{l_0^2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}$

Als Lösungsvektoren ergeben sich dann

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_{11}\cos(\omega_1 t) + C_{12}\sin(\omega_1 t)) + \begin{pmatrix} -\frac{m_2}{m_1} \\ 1 \end{pmatrix} (C_{21}\cos(\omega_3 t) + C_{22}\sin(\omega_3 t))$$

Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich dann

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \frac{m_1}{m_1+m_2}\cos(\omega_1 t) + \varphi_0 \frac{m_2}{m_1+m_2}\cos(\omega_3 t) \\ \varphi_0 \frac{m_1}{m_1+m_2}\cos(\omega_1 t) - \varphi_0 \frac{m_1}{m_1+m_2}\cos(\omega_3 t) \end{pmatrix}$$

Der Unterschied besteht in dem von den Massen abhängigen Faktoren, welche die Amplitude auf ein Vielfaches von φ_0 beschränkt.

Der zeitliche Verlauf ist hier jedoch vergleichbar mit dem von b), die einzige Veränderung ist in der Größe der Amplituden und dass ϕ_1 nicht 0 wird.

17. Aufgabe: Federkette

Bezeichne nun s_0 die Länge der entspannten Feder. Das allgemeine Potential lässt sich dann schreiben als $U = \frac{D}{2}\sum\limits_{i=1}^{3}(s_i - s_0)^2$, mit $s_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, s_2 = \sqrt{x_2^2 + (y_2 - y_1)^2}, s_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2}$ und $x_1 = l - 0 + q_1, x_2 = l_0 + q_2 - q_1, x_3 = l_0 - q_2$
Das Potential ist dann

$$
\begin{aligned}
U = \frac{D}{2}\left(\sqrt{y_1^2 + (q_1 + l_0^2)^2} - s_0\right)^2 &+ \frac{D}{2}\left(\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (l_0 - q_1 + q_2)^2} - s_0\right)^2 \\
&+ \frac{D}{2}\left(\sqrt{y_2^2 + (l_0 - q_2)^2} - s_0\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m\dot{q}_i^2
$$

(a) Hier wird nur die Auslenkung bezüglich der $x-$Koordinate betrachtet $\implies y_1 = y_2 = \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$

Somit ergibt sich

$$
M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}
$$

$$
K = \begin{pmatrix} 2D & -D \\ -D & 2D \end{pmatrix}
$$

Damit ergibt sich für die Bewegungsgleichungen

$$
\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2D & -D \\ -D & 2D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0
$$

(b) Betrachtet man nun die Auslenkung in $y-$Richtung , so ergibt sich

$$
T_y = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i\dot{y}_i^2
$$

$$
U_y = \frac{1}{2}D\left((\sqrt{l_0^2 + y_1^2} - s0)^2 + (\sqrt{l_0^2 + (y_1 - y_2)^2} - s_0)^2 + (\sqrt{l_0^2 + y_2^2} - s_0)^2\right)
$$

Somit folgt für die Matrizen

$$M_y = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$K_y = H_U(0) = (1 - \frac{s_0}{l_0}) \begin{pmatrix} 2D & -D \\ -D & 2D \end{pmatrix}$$

Die Bewegungsgleichung ergibt sich dann als

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{s_0}{l_0}\right) \begin{pmatrix} 2D & -D \\ -D & 2D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Lösen der Longitudinal-Richtung :

$$\det(K_x - \omega^2 M_x) = 0 \implies \omega^2 \in \left\{3\frac{D}{m}, \frac{D}{m}\right\}$$

$\omega_1 = \sqrt{3\frac{D}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$$x(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_{11} \cos(\omega_1 t) + C_{12} \sin(\omega_1 t)) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_{21} \cos(\omega_2 t) + C_{22} \sin(\omega_2 t))$$

Lösen der Transversal-Richtung :

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \implies \omega^2 \in \{3\frac{D}{m}(1 - \frac{s_0}{l_0}), \frac{D}{m}(1 - \frac{s_0}{l_0})\}$$

Die Fundamentalschwingungen dazu sind

$$y^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left(C_{y,11} \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}(1 - \frac{s_0}{l_0})}\right) + C_{y,12} \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}(1 - \frac{s_0}{l_0})}\right)\right)$$
$$y^2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \left(C_{y,21} \cos\left(\sqrt{3 \cdot \frac{D}{m}(1 - \frac{s_0}{l_0})}\right) + C_{y,22} \sin\left(\sqrt{3 \cdot \frac{D}{m}(1 - \frac{s_0}{l_0})}\right)\right)$$

Die allgemeinste Lösung ist dann $y(t) = y^1(t) + y^2(t)$

Für die Ortsvektoren zu den Massen gilt dann $\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

18. Aufgabe: Dreiatomiges Molekül

(a)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{k}{2}\left((x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2\right)$$

(b) Zur Berechnung der Eigenfrequenzen werden die beiden Matrizen aufgestellt

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

Um die Eigenfrequenzen zu bestimmen, gilt mit dem Lösungsansatz $x(t) = Ae^{i\omega t}$ und $M\ddot{x} + Kx = 0$ und der Bedingung dass es nicht triviale Lösungen geben muss

$$\det(K - \omega^2 M) = -(k - \omega^2 m)\omega^2(kM + 2km - Mm\omega^2) \stackrel{!}{=} 0$$

Damit ergibt sich

$$\omega^2 \in \left\{0, \frac{k}{m}, \frac{(M + 2m)k}{Mm}\right\}$$

(c) Als Transformationsmatrix zu $\omega_1^2 = 0, \omega_2^2 = \frac{k}{m}, \omega_3^2 = \frac{(M+2m)k}{Mm}$ ergibt sich

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2+4\frac{m}{M}^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2m}{M\sqrt{2+4\frac{m}{M}^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2+4\frac{m}{M}^2}} \end{pmatrix}$$

Seien $\vec{Q}$ nun die Normalkoordinaten, so gilt $\vec{x} = S\vec{Q}$
$\ddot{\vec{x}} + M^{-1}K\vec{x} = 0$, $\vec{v}_i$ ist EV von $M^{-1}K$ zum EW ω_i^2
$M^{-1}K\vec{v}_i = \omega_i^2\vec{v}_i$
$S\ddot{\vec{Q}} + M^{-1}KS\vec{Q} = 0 \implies S\ddot{\vec{Q}} + (\vec{v}_1\omega_1^2, \vec{v}_2\omega_2^2, \vec{v}_3\omega_3^2)\vec{Q} = 0$

Also $\sum_{i=1}^{3} \vec{v}_i \ddot{Q}_i + \vec{v}_i \omega_i^2 Q_i = 0$. Da EV linear unabhängig sind, folgt

$$\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = 0$$

für alle $i = 1, 2, 3$

(d) Fundamentallösung zu ω_1 + Fundamentallösung zu ω_2 + Fundamentallösung zu ω_3

Lösung 1 : $x^1(t) = \vec{v}t + \vec{x}_0$

Lösung 2 : $x^2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(C_{21} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_{22} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)$

Lösung 3 : $x^3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} \left(C_{31} \cos\left(\sqrt{\frac{(M+2m)k}{Mm}}t\right) + C_{32} \sin\left(\sqrt{\frac{(M+2m)k}{Mm}}t\right)\right)$

Somit ergibt sich für die allgemeine Lösung

$$x(t) = x^1(t) + x^2(t) + x^3(t)$$

Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik II — Blatt 7

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik) — Abgabe: Freitag, 10.06.2011, 11:30 Uhr

Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik) — Besprechung: Dienstag, 14.06.2011

Wichtig: Die Probeklausur findet am 07.06.2011 von 17:30 – 20:00 im Gerthsen Hörsaal (Nachnamen A-K) und im Audimax (Nachnamen L-Z) statt. Zugelassenes Hilfsmittel ist ein doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt.
Das Beratungstutorium findet am 01.06.11 um 15:45 um Lehmann Hörsaal statt.

Aufgabe 19: unendliche Federkette — 5 Punkte

Betrachten Sie wie in Aufgabe 17 eine Federkette, jetzt aber bestehend aus $N+1$ Federn (Federkonstante D) und N Massen (Masse m). Der Abstand zwischen den Massen und von der Wand betrage jeweils l_0.

a) Betrachten Sie nur transversale Auslenkungen in der Ebene. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Hinweis: Die Bewegungsgleichungen lassen sich in kompakter Form schreiben, wenn man eine 0. und $(N+1)$-te Masse mit Koordinaten $q_0(t) = q_{N+1}(t) = 0$ einführt.

b) Um die Bewegungsgleichungen zu lösen machen Sie den Ansatz

$$q_j(t) = C a_j \cos(\omega t + \delta) = C \sin(\alpha j) \cos(\omega t + \delta)\,,\; j = 1, \ldots, N\,.$$

(i) Bestimmen Sie α.

(ii) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen ω_r.

(iii) Geben Sie die allgemeinste Lösung an. Sind die Schwingungen periodisch?

(iv) Drücken Sie allgemein die Integrationskonstanten durch die Anfangsbedingungen $q_j(0), \dot{q}_j(0)$ aus.

c) Führen Sie den Kontinuumslimes durch, d.h. betrachten Sie den Limes $N \to \infty$, wobei zu berücksichtigen ist, dass zusätzlich

$n \to \infty$	$l_0 \to 0$	so dass	$(N+1)l_0 = l =$ konst
$m \to 0$	$l_0 \to 0$	so dass	$m/l_0 = \rho =$ konst
$D \to \infty$	$l_0 \to 0$	so dass	$Dl_0 =$ konst

erfüllt ist. Ersetzen Sie $q_j(t) \to \Psi(x,t),\ x = jl_0$ und bestimmen Sie die Differentialgleichung für $\Psi(x,t)$.

Aufgabe 20: Wellengleichung — 2 Punkte

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) = 0\,.$$

Eine Klasse von Lösungen dieser Differentialgleichung, die Bernoullischen Lösungen, hat die Form

$$\Psi(x,t) = \chi(x)\phi(t)\,.$$

a) Machen Sie obigen Ansatz für $\Psi(x,t)$ und bestimmen Sie die Lösungen für $\chi(x)$ und $\phi(t)$.

b) Betrachten Sie nun ein Randwertproblem mit den Bedingungen $\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0$. Geben Sie die allgemeinste Lösung dieses Problems an.

(bitte wenden)

Aufgabe 21: angeregte/gedämpfte Schwingung 3 Punkte

Betrachten Sie einen angeregten harmonischen Oszillator mit Dämpfung. Die zugehörige Bewegungsgleichung hat die Standardform

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t\,.$$

a) Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung für den Fall $f_0 = 0$. Betrachten Sie die Fälle $\gamma^2 < \omega_0^2$, $\gamma^2 > \omega_0^2$, $\gamma^2 = \omega_0^2$.

b) Finden Sie nun eine spezielle Lösung des vollen Problems, machen Sie hierzu den Ansatz

$$x(t) = Ae^{i(\Omega t - \varphi)}$$

und bestimmen Sie A und φ. Wie lautet die allgemeine Lösung des vollen Problems?

19. Aufgabe: unendliche Federkette

Im Tutorium so besprochen:

(a) allgemein: $m \cdot \ddot{q}_i + 2 \cdot Dq_i - q_{i+1} - q_{i-1} = 0, q_0 = q_{N+1} = 0$

(b) Ansatz: $q_j(t) = C \cdot a_j \cdot \cos(\omega t + \delta) = C \cdot \sin(\alpha j) \cdot \cos(\omega t + \delta)$
$q_{N+1} = 0 \implies \sin(\alpha\cdot(N+1)) = 0 \implies \alpha\cdot(N+1) = r\cdot\pi \implies \alpha_r = \frac{r\pi}{N+1}, r = 1, \ldots, N$
Ansatz einsetzen: $-m\omega^2 \cdot \sin(\alpha j) + D \cdot (2 \cdot \sin(\alpha j) - \sin(\alpha(j+1)) - \sin(\alpha(j-1))) = 0$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$-m\omega^2 \cdot \sin(\alpha j) + D(2\sin(\alpha j) - \sin(\alpha j) \cdot \cos(\alpha - \cos(\alpha j)\sin(\alpha) - \sin(\alpha j)\cos(\alpha) + \cos(\alpha j)\sin(\alpha)) = 0$
$\implies \sin(\alpha j) \cdot (-m\omega^2 + 2D - 2D\cos(\alpha)) = 0 \implies$ Der Teil in der Klammer ist 0.
$\implies \omega^2 = 2\frac{D}{m} \cdot (1 - \cos(\alpha)), \omega_r^2 = 2\frac{D}{m} \cdot (1 - \cos(\frac{r\pi}{N+1})) = 4\frac{D}{m} \cdot \sin^2(\frac{r\pi}{2(N+1)})$
allgemeinste Lösung: $q_j(t) = \sum_{k=1}^{N} (A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)) \cdot \sin(\alpha_k j)$

$q_j(0) = \sum_{k=1}^{N} A_k \sin(\alpha_k j) = \sum_{k=1}^{N} A_k \sin(\frac{k\pi}{N+1} j$
$\dot{q}_j(0) = \sum_{k=1}^{N} B_k \omega_k \sin(\alpha_k j)$
$\sum_{j=1}^{N} \sin(\frac{r\pi}{N+1} j) \sin(\frac{k\pi}{N+1} j) = \frac{N+1}{2} \delta_{rk}$
$\int_0^L \sin(\frac{m\pi x}{L} \sin(\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{2}\delta_{mn}$
$\sum_{j=1}^{N} q_j(0) \sin(\frac{r\pi}{N+1}) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_k \sin(\frac{k\pi}{N+1} j) \sin(\frac{r\pi}{N+1} j) = \sum_{k=1}^{N} A_k \frac{N+1}{2} \delta_{rk} = A_r \frac{N+1}{2}$
$\sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j \sin(\frac{r\pi}{N+1} j) = \sum_{k,j=1}^{N} B_k \omega_k \sin(\frac{k\pi}{N+1} j) \sin(\frac{r\pi}{N+1} j) = \sum_{k=1}^{N} B_k \omega_k \delta_{kr} \frac{N+1}{2} = B_r \omega_r \frac{N+1}{2}$

(c) $(N+1)_0 = l, \frac{m}{l_0} = \rho, Dl_0 =$ const. $= k$ alle $\to l_0 \to 0$
$m\ddot{q}_j - D(2q_j - q_{j+1} - q_{j-1}? = 0$ Teile durch Dl_0^2
$\frac{m}{Dl_0^2}\ddot{q}_j + \frac{1}{l_0}(\frac{2q_i}{l_0} - \frac{q_{j+1}}{l_0} - \frac{q_{j-1}}{l_0}) = 0$ mit $\frac{m}{Dl_0^2} = const.$
$\frac{1}{c^2}\ddot{q}_j + \frac{1}{l_0} - \frac{q_{j+1} - q_j}{l_0} + \frac{q_j - q_{j-1}}{l_0} = 0$
$q_j(t) \to \Psi(x,t) = \Psi'(jl_0, t)$
mit $l_0 \to 0$: $\frac{1}{c^2}\ddot{q}_j + \lim_{l_0 \to 0} \frac{1}{l_0}(-\frac{\partial\Psi}{\partial x}(jl_0) + \frac{\partial\Psi}{\partial x}(j-1)l_0) = \frac{1}{c^2}\ddot{q}_j - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x)) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0$

(a) Mit $q_0 = q_{N+1} = \dot{q}_0 = \dot{q}_{N+1} = 0$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m\dot{q}_i^2$$

$$U = \frac{D}{2}\sum_{i=0}^{N}\left(\sqrt{l_0^2 + (q_i - q_{i+1})^2} - s_0\right)^2$$

$$M = m \cdot \mathbb{1}$$

$$(K)_{ij} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial q_i}U(0,0)$$

Dies ist eine Tridiagonalmatrix mit $K \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und den Koeffizienten

$$(K)_{ij} = D \cdot (1 - \frac{s_0}{l_0}) \begin{cases} 2 & j = i \\ -1 & |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichung ist dann $M\ddot{q} + Kq = 0$

(b) (i)

$$q_j(t) = C\sin(\alpha j)\cos(\omega t + \delta)$$
$$\ddot{q}_j(t) = -\omega^2 C\sin(\alpha j)\cos(\omega t + \delta)$$

$$C\cos(\omega t + \delta)\left(\sum_{j=1}^{N}\sin(\alpha j)(K_{ij} - m\omega^2)\right) = 0$$

$$-D(1 - \frac{s_0}{l_0})\left(\sin(\alpha(i-1)) + \sin(\alpha(i+1))\right) + (2D(1 - \frac{s_0}{l_0}) - m\omega^2)\sin(\alpha i) = 0$$

Sei nun $b := D(1 - \frac{s_0}{l_0})$, dann folgt aus der Gleichung mit Additionstheoremen

$$\sin(\alpha i)\left(2b\cos(\alpha) - 2b + m\omega^2\right) = 0$$

Da $\sin(\alpha i) = 0$ keine dauerhafte Lösung ist, folgt also

$$2b\cos(\alpha) - 2b + m\omega^2 = 0 \implies$$

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{m\omega^2}{2b}\right)$$

Für $i \in \{2, \dots, N-1\}$

(ii) Rekursiv ergibt sich für $A = K - \omega^2 M$ und $b = D \cdot (1 - \frac{s_0}{l_0})$

$$\det A_n = (2b - m\omega^2)\det(A_{n-1}) - b^2 \det(A_{n-2})$$

Mit den Startwerten

$$\det A_1 = 2b - m\omega^2$$

$$\det A_2 = 3b^2 - 4bm\omega^2 + m^2\omega^4$$

(iii)

(iv)

(c)

20. Aufgabe: Wellengleichung

Im Tutorium so besprochen:

(a) Den Ansatz einsetzen: $\frac{1}{c^2}\chi\phi'' = \chi''\phi$ teile durch $\chi\phi$
$\frac{1}{c^2}\frac{\phi''}{\phi} = \frac{\chi''}{\chi} = \text{const.} = -k^2 \implies \phi'' + c^2k^2\phi = 0, \chi'' + k^2\chi = 0 \implies \phi(t) = A_1\cos(ckt) + B_1\sin(ckt) = A\cos(ckt + \delta)$
$\chi(x) = A_2\cos(kx) + B_2\sin(kx)$

(b) $\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0$
$\implies \Psi(0) = \Psi(L) = 0$
$\implies A_2 = 0, \sin(kL) = 0 \implies kL = n\pi, n \in \mathbb{N}$
Allgemeinste Lösung: $\Psi(x,t) = \sum\limits_n A_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(ckt + \delta)$

Die eindimensionale Wellengleichung ist gegeben durch

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

(a) Sei nun

$$\psi(x,t) = \chi(x)\phi(t)$$

. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\chi(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(t) = c^2\phi(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi(x)$$

Verwende den Ansatz

$$\begin{aligned}\chi(x) &= C_{11}\cos(\omega_1 x) + C_{12}\sin(\omega_2 x)\\ \phi(t) &= C_{21}\cos(c\omega_2 t) + C_{22}\sin(c\omega_2 t)\end{aligned}$$

Eingesetz in die Differentialgleichung ergibt dies

$$-c^2\omega_2^2\chi(x)\phi(t) = -\omega_1^2 c^2\phi(t)\chi(x)$$

Daraus folgt

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega^2$$

Also ist

$$\psi(x,t) = \chi(x)\phi(t)$$

mit

$$\begin{aligned}\chi(x) &= C_{11}\cos(\omega x) + C_{12}\sin(\omega x)\\ \phi(t) &= C_{21}\cos(c\omega t) + C_{22}\sin(c\omega t)\end{aligned}$$

(b) Nun sei

$$\begin{aligned}\psi(0,t) &= \chi(0)\phi(t) = 0\\ \psi(L,t) &= \chi(L)\phi(t) = 0\end{aligned}$$

Da $\phi(t)$ nicht immer 0 ist, folgt daraus

$$\begin{aligned}\chi(0) &= C_{11}0\\ \chi(L) &= 0\end{aligned}$$

$$C_{11} = 0$$
$$C_{21}\sin(\omega L) = 0$$

Somit folgt als Lösung

$$C_{11} = 0$$
$$\omega = k\frac{2\pi}{L} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Damit ist die Wellengleichung gegeben durch

$$\psi(x,t) = C_{12}\sin(k\frac{2\pi}{L}x)\left(C_{21}\cos(ck\frac{2\pi}{L}t) + C_{22}\sin(ck\frac{2\pi}{L}t)\right)$$

21. Aufgabe: angeregte/gedämpfte Schwingungen

Im Tutorium so besprochen:

(a) Fall $f_0 = 0$
Ansatz: $e^{(i\omega-\beta)t}$
$\implies -\omega^2+\beta^2-2i\beta\omega+2\gamma(i\omega-\beta)+\omega_0^2 = 0 \implies -\omega^2+\beta^2-2\gamma\beta+\omega_0^2+i(-2\beta\omega_0+2\gamma\omega) = 0 \implies \beta = \gamma, \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$
Fallunterscheidung: $\omega_0^2 > \gamma^2 \implies x(t) = (A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t))e^{-\gamma t}$
$\gamma^2 = \omega_0^2 \implies \omega^2 = 0 \implies x(t) = e^{-\gamma t}(B + tA)$
$\gamma^2 > \omega_0^2 \implies x(t) = Ae^{-(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t} + Be^{-(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t}$

(b) $f_0 \neq 0$
Ansatz: $x(t) = Ae^{i(\Omega t-\phi)} \implies Ae^{i(\Omega t-\phi)}(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) = f_0e^{i\Omega t} \implies A(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) = f_0e^{i\phi}$
$\implies A\sqrt{(-\Omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} = f_0 \implies A = \frac{f_0}{\sqrt{\cdots}}$
$\tan(\phi) = \frac{A2\gamma\Omega}{A(-\Omega^2+\omega_0^2)}$
spezielle Lösung: $\tilde{x}(t) = A\cos(\Omega t - \phi)$
allgemeine Lösung: $\omega^2 > \gamma^2 : x(t) = (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))e^{-\gamma t} + \tilde{x}(t)$

(a) Betrachte nun

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Setze als Lösungsansatz $x(t) = Ce^{\omega t}$. Damit folgt für die Differentialgleichung

$$\omega^2 + 2\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$$

Somit ist

$$\omega_{1,2} = -\gamma \pm \frac{\sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Betrachte nun folgende Fälle

(i) **Schwingungsfall** $\gamma^2 < \omega_0^2 \implies \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\Omega$ Somit gilt für die Lösung

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{i\Omega t}\right) = e^{-\gamma t}\left(A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)\right)$$

Also schwingt das System mit der Frequenz Ω.

(ii) **Kriechfall** $\gamma^2 > \omega_0^2 \implies \Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ und

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{\Omega t} + C_2 e^{\Omega t}\right) = e^{-\gamma t}\left(A\sinh(\Omega t) + B\cosh(\Omega t)\right)$$

Das System schwingt nicht.

(iii) **Aperiodischer Grenzfall** $\gamma^2 = \omega_0^2 \implies \Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = 0 \implies \omega = -\gamma$. Lösung der Differentialgleichung ist dann

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$$

Beweis erfolgt durch einsetzen mit $\dot{x} = -C_1\gamma e^{-\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t}(1 - t\gamma), \ddot{x} = C_1\gamma^2 e^{-\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t}\gamma(t\gamma - 2)$

(b) Sei nun $x(t) = Ae^{i(\Omega t - \varphi)}, \dot{x} = i\Omega A e^{i(\Omega t - \varphi)}, \ddot{x} = -A\Omega^2 e^{i(\Omega t - \varphi)}$. Somit folgt aus der Differentialgleichung

$$\left(-\Omega^2 + 2\gamma i\Omega + \omega_0^2\right) A e^{i(\Omega t - \varphi)} = f_0\cos(\Omega t)$$

$$A\left(-\Omega^2 + 2\gamma i\Omega + \omega_0^2\right) i\sin(\Omega t - \varphi) + A\left(-\Omega^2 + 2\gamma i\Omega + \omega_0^2\right)\cos(\Omega t - \varphi) = f_0\cos(\Omega t)$$

Also

$$\sin(\Omega t - \varphi) A(\Omega^2 - \omega_0^2) - 2A\gamma\Omega\cos(\Omega t - \varphi) = 0$$
$$A(\Omega^2 - \omega_0^2)\cos(\Omega t - \varphi) - 2A\gamma\Omega\sin(\Omega t - \varphi) = f_0\cos(\Omega t)$$

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)

Abgabe: Montag, 20.06.2011, 11:30 Uhr
Besprechung: Dienstag, 21.06.2011

Aufgabe 22: inhomogene Differentialgleichungen — 2 Punkte

Es treten häufig inhomogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = \sum_n (A_n \cos n\tau + B_n \sin n\tau) \tag{1}$$

auf.

a) Zeigen Sie, dass für Differentialgleichungen diesen Typs das Superpositionsgesetz gilt, d.h. falls $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen der Differentialgleichungen

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = f_j(\tau)\,, \quad j = 1, 2$$

sind, dann ist $x(\tau) = x_1(\tau) + x_2(\tau)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = f_1(\tau) + f_2(\tau)\,.$$

Es ist also ausreichend, sich die Lösungen der Differentialgleichung (1) für die einzelnen Terme auf der rechten Seite getrennt anzuschauen.

b) Berechnen Sie die speziellen Lösungen der Differentialgleichungen

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = A_n \cos n\tau\,,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $n = 1$ und $n > 1$ getrennt, machen Sie den Ansatz $x(\tau) = a_1 \tau \sin \tau$ bzw. $x(\tau) = a_n \cos n\tau$ und bestimmen Sie die Koeffizienten a_i.

Wiederholen Sie die Analyse für die Differentialgleichungen

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = B_n \sin n\tau\,.$$

Aufgabe 23: selbsterregender Schwinger — 5 Punkte

Betrachten Sie ein System mit der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \epsilon \left(x^2 - 1\right) \dot{x} + x = 0\,.$$

Diese Differentialgleichung, eine vereinfachte Form der "Van der Polschen Gleichung", beschreibt ein System, bei dem kleine Auslenkungen verstärkt und große gedämpft werden.
Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe der Störungstheorie bis zur zweiten Ordnung in ϵ.
Zur Zeit $t = 0$ gelte $\dot{x}(0) = 0$.

a) Ersetzen Sie $\tau = \omega t$ und zeigen Sie, dass man dann die Differentialgleichung

$$\omega^2 x'' + \epsilon\omega \left(x^2 - 1\right) x' + x = 0$$

erhält, wobei der Strich die Ableitung nach τ bezeichnet.

b) Machen Sie für x und ω einen Potenzreihenansatz der Form

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2\,,$$
$$\omega = 1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2\,.$$

Setzen Sie diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein und sortieren Sie nach Potenzen von ϵ, wobei Terme der Ordnung ϵ^3 und höher zu vernachlässigen sind. Lösen Sie die so erhaltenen Differentialgleichungen für x_0, x_1, x_2 iterativ.

(bitte wenden)

Hinweis: Benutzen Sie Identitäten für die Produkte von trigonometrischen Funktionen, um diese zu beseitigen und verwenden Sie dann die Ergebnisse aus Aufgabe 22. Terme der Form $\tau \sin \tau$ bzw. $\tau \cos \tau$ sind nicht physikalisch, eliminieren Sie sie durch geeignete Wahl der Konstanten. Für x_1 und x_2 sollten die Differentialgleichungen die folgende Form haben:

$$
\begin{aligned}
x_1'' + x_1 &= 2A_0\omega_1 \cos\tau + \left(\frac{1}{4}A_0^3 - A_0\right)\sin\tau + \frac{A_0^3}{4}\sin 3\tau \\
x_2'' + x_2 &= \left(4\omega_2 + \frac{1}{4}\right)\cos\tau + 2C_2 \sin\tau - \frac{3}{2}\cos 3\tau + 3C_2 \sin 3\tau + \frac{5}{4}\cos 5\tau\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 24: Konvergenz der Störungsreihe 3 Punkte

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x} = x + \epsilon x^2$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = A$.

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung der Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung in 2. Ordnung der Störungsreihe. Machen Sie hierzu einen Potenzreihenansatz (in ϵ) für $x(t)$.

c) Entwickeln Sie die exakte Lösung aus a) in ϵ und vergleichen Sie mit der Näherung aus b). Für welche Zeiten ist die Näherung sinnvoll?

22. Aufgabe: inhomogene Differentialgleichungen

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = \sum_n A_n cos(n\tau) + B_n \sin(n\tau)$$

(a) Es gelte

$$\ddot{x}_1(\tau) + x_1(\tau) = f_1(\tau)$$
$$\ddot{x}_2(\tau) + x_2(\tau) = f_2(\tau)$$

Somit gilt für

$$x(\tau) = x_1(\tau) + x_2(\tau)$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(\tau) + x(\tau) &= \ddot{x}_1(\tau) + \ddot{x}_2(\tau) + x_1(\tau) + x_2(\tau)\\ &= \ddot{x}_1(\tau) + x_1(\tau) + \ddot{x}_2(\tau) + x_2(\tau)\\ &= f_1(\tau) + f_2(\tau)\end{aligned}$$

(b)

1.Fall Betrachte nun

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = A_n \cos(n\tau)$$

$n = 1$ Ansatz

$$x(\tau) = a_1 \tau \sin(\tau)$$

Einsetzen ergibt

$$2a_1 = A_1$$

und somit

$$a_1 = \frac{A_1}{2}$$

$n > 1$ Ansatz

$$x(\tau) = a_n \cos(n\tau)$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$-a_n \cos(n\tau)(n^2 - 1) = A_n \cos(n\tau)$$

Das liefert für die Koeffizienten

$$a_n = -\frac{A_n}{n^2 - 1}$$

2. Fall Betrachte nun

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) = B_n \sin(n\tau)$$

$n = 1$ Ansatz

$$x(\tau) = b_1 \tau \cos(\tau)$$

Einsetzen liefert

$$b_1 = -\frac{B_1}{2}$$

$n > 1$ Ansatz

$$x(\tau) = b_n \sin(n\tau)$$

Einsetzen liefert

$$-b_n \sin(n\tau)(n^2 - 1) = B_n \sin(n\tau)$$

Dies liefert für die Koeffizienten

$$b_n = -\frac{B_n}{n^2 - 1}$$

23. Aufgabe: selbsterregender Schwinger

Geben sei

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

(a) Verwende

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x &= \frac{d\tau(t)}{dt}\frac{dx}{d\tau} \\
&= \omega x' \\
\frac{d^2}{dt^2}x(t) &= \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}x \\
&= \left(\frac{d\tau(t)}{dt}\frac{d}{d\tau}\right)\left(\frac{d\tau(t)}{dt}\frac{d}{d\tau}\right)x(\tau) \\
&= \omega^2\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2} \\
&= \omega^2 x''
\end{aligned}$$

Somit folgt aus der UrsprungsDGL

$$\omega^2 x'' + \varepsilon\omega(x^2-1)x' + x = 0$$

(b) Nun sei der Ansatz

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 \\
\omega &= 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2
\end{aligned}$$

Eingesetz in die Differentialgleichung mit vernachlässigung aller Terme mit ε^3 und höher ergibt

$$\begin{aligned}
0 = {} & x_0 + x_0'' \\
& + \varepsilon\left(x_1 + 2\omega_1 x_0'' + x_1'' - x_0' + x_0^2 x_0'\right) \\
& + \varepsilon^2\left((2\omega_2+\omega_1)^2 x_0'' + x_2'' + 2\omega_1 x_1'' + (x_0^2-1)\omega_1 x_0' + (x_0^2-1)x_1' + 2x_1x_0x_0' + x_2\right)
\end{aligned}$$

Verwende

$$\begin{aligned} x'(0) &= x_0'(0) + \varepsilon x_1'(0) + \varepsilon x_2'(0) = 0 \\ x_0'(0) &= 0 \\ x_1'(0) &= 0 \\ x_2'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Löse nach

x_0

$$x_0 + x_0'' = 0$$

Lösung ist dann

$$x_0(\tau) = A_0 \cos(\tau) + B_0 \sin(\tau)$$

Aus $x_0'(0) = 0$ folgt $B_0 = 0$ Also

$$x_0(\tau) = A_0 \cos(\tau)$$

x_1 Es ergibt sich :

$$x_1'' + x_1 = 2\omega_1 A_0 \cos(\tau) + A_0 \sin(\tau)(A_0^2 \cos^2(\tau) - 1)$$

$$\cos^2(\tau)\sin(\tau) = \frac{1}{2}\,(1 + \cos(2\tau))\sin(\tau)) = \frac{1}{4}\,(\sin(3\tau) - \sin(\tau))$$

Also

$$x_1'' + x_1 = \underbrace{2A_0\omega_1}_{A_1}\cos(\tau) + \underbrace{(\frac{A_0^3}{4} - A_0)}_{B_1}\sin(\tau) + \underbrace{\frac{A_0^3}{4}}_{B_3}\sin(3\tau)$$

Da $\tau \sin\tau$ und $\tau\cos\tau$ unphysikalisch sind, folgt

$$B_1 = 0 = \frac{A_0^3}{4} - A_0 \implies A_0 = 2$$

$$A_1 = 0 = 2A_0\omega_1 \implies \omega_1 = 0$$

$$x_{1,p} = -\frac{B_3}{n^2 - 1}\sin(3\tau) = -\frac{A_0^3}{32}\sin(3\tau)$$

$$x_{1,h} = C_1 \cos\tau + C_2 \sin\tau$$

$$x_1 = x_{1,h} + x_{1,p}$$

$$x_1'(0) = 0 = C_2 - \frac{3}{4} = 0 \implies C_2 = \frac{3}{4}$$

Also insgesamt

$$x_1 = C_1 \cos(\tau) + \frac{3}{4}\sin(\tau) - \frac{1}{4}\sin(3\tau)$$

x_2

$$x_2 + x_2'' = \cos(\tau)\left(\frac{1}{4} + 4\omega_2\right) - \frac{3}{2}\cos(3\tau) + \frac{5}{4}\cos(5\tau) + 2C_1\sin(\tau) + 3C_1\sin(3\tau)$$

Wieder mit $B_1 = A_1 \overset{!}{=} 0$ folgt $\omega_2 = -\frac{1}{16}, C_1 = 0$

$$x_2 = D_1\cos(\tau) + D_2\sin(\tau) + \frac{3}{16}\cos(3\tau) - \frac{5}{96}\cos(5\tau)$$

Nun muss wieder gelten

$$x_2'(0) = 0 \implies D_2 = 0$$

24. Aufgabe: Konvergenz der Störungstheorie

Nun sei

$$\dot{x} = x(1 + \varepsilon x)$$

mit

$$x(0) = A$$

(a) Es folgt aus der DGL

$$\begin{aligned}
\int dt &= \int \frac{1}{x + \varepsilon x^2} dx \\
t &= \ln(x) - \ln(1 + \varepsilon x) + C \\
e^t &= \frac{xe^C}{1 + \varepsilon x} \\
x(t) &= -\frac{e^t}{e^C - e^t\varepsilon}
\end{aligned}$$

Mit

$$x(0) = A$$

folgt

$$e^C = \frac{1 + A\varepsilon}{A}$$
$$x(t) = \frac{Ae^t}{1 + A\varepsilon(1 - e^t)}$$

(b) Da

$$\dot{x}(0) = A$$

muss gelten

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0(0) + \varepsilon\dot{x}_1(0) + \varepsilon^2\dot{x}_2(0) = A$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\dot{x}_0(0) = A$$
$$\dot{x}_1(0) = 0$$
$$\dot{x}_2(0) = 0$$

Verwende den Ansatz

$$x(t) = x_0 + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)$$

Dann ergibt sich aus der Differentialgleichung

$$\dot{x}_0 + \varepsilon\dot{x}_1 + \varepsilon^2\dot{x}_2 = \left(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2\right)\left(1 + \varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2)\right)$$

0.te Ordnung

$$\dot{x}_0 = x_0$$

Die Lösung ist dann

$$x_0(t) = C_0 e^t$$

Mit $\dot{x}_0(0) = A$ folgt

$$C_0 = A$$

und somit

$$x_0(t) = Ae^t$$

1.te Ordnung Nun folgt die DGL

$$\dot{x}_1 = \left(A^2 e^{2t} + x_1\right)$$

Somit folgt

$$x_1(t) = x_0^2 + C_1 e^t = A^2 e^{2t} + C_1 e^t$$

Mit

$$\dot{x}_1(0) = 0 \implies 2A^2 + C_1 = 0 \implies C_1 = -2A^2$$

Und somit

$$x_1(t) = A^2 e^{2t} - 2A^2 e^t = x_1(t) = A^2 e^t (e^t - 1)$$

2.te Ordnung Es folgt nun die DGL

$$\dot{x}_2 = 2A^3 e^{3t} - 2A^3 e^{2t} + x_2$$

Die Lösung ist dann

$$x_2(t) = C_h e^t + C_{p,1} e^{2t} + C_{p,2} e^{3t}$$

Eingesetzt

$$C_h e^t + 2C_{p,1} e^{2t} + 3C_{p,2} e^{3t} = 2A^3 e^{3t} - 2A^3 e^{2t} + C_h e^t + C_{p,1} e^{2t} + C_{p,3} e^{3t}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} C_{p,2} &= A3 \\ C_{p,1} &= -2A^3 \end{aligned}$$

Anfangsbedingung

$$x_2(0) = C_h + A^3 - 2A^3 \stackrel{!}{=} 0 \implies C_h = A^3$$

Als ganze Lösung ergibt sich dann

$$x_S(t) = Ae^t \left(1 + \varepsilon A(e^t - 1) + \varepsilon^2 A^2 (e^t - 1)^2\right)$$

(c) Für die $n-te$Ableitung nach ε kann man erkennen

$$x^{(n)}(t) = (-1)^n \frac{n! A^{n+1} e^t (1-e^t)^n}{(1 + A\varepsilon(1-e^t))^{n+1}}$$

Damit gibt die Taylor-Reihe um 0

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}|_{\varepsilon_0=0}}{n!} \varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{n+1} e^t (1-e^t)^n}{(1 + A\varepsilon_0(1-e^t))^{n+1}} |_{\varepsilon_0=0} \varepsilon^n$$

Für die $i-$te Teilsumme gilt dann

$$\begin{aligned} K(i) &= \sum_{n=0}^{i} (-1)^n \frac{A^{n+1} e^t (1-e^t)^n}{(1 + A\varepsilon_0(1-e^t))^{n+1}} |_{\varepsilon_0=0} \varepsilon^n \\ &= \frac{Ae^t (A(e^t-1)\varepsilon)^{i+1}}{A\varepsilon(e^t-1)-1} - \frac{Ae^t}{A\varepsilon(e^t-1)-1} \\ &= Ae^t \frac{1-(A(e^t-1)\varepsilon)^{i+1}}{1-(A(e^t-1)\varepsilon)} \end{aligned}$$

Dies ist die geometrische Reihe , die nur einen Grenzwert hat, falls

$$A\varepsilon(e^t - 1) < 1$$

Dann ist

$$x(t) \approx Ae^t \left(1 + \varepsilon A(e^t-1) + \varepsilon^2 A^2 (e^t-1)^2\right)$$

Somit muss für die Zeit gelten

$$t < \ln\left(1 + \frac{1}{A\varepsilon}\right)$$

Aufgabe 25: Poisson-Klammern 7 Punkte

Die Poisson-Klammer zweier Funktion $f(\underline{p},\underline{q},t), g(\underline{p},\underline{q},t)$ ($\underline{q} = q_1,\ldots,q_n$; $\underline{p} = p_1,\ldots,p_n$,), die von den verallgemeinerten Koordinaten q_i und Impulsen $p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L$ abhängen, ist gegeben durch

$$\{f,g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\,.$$

a) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Poisson-Klammer. f, f_1, f_2, f_3, g seien Funktionen und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

(i)

$$\begin{aligned}
\{f_1+f_2,g\} &= \{f_1,g\}+\{f_2,g\}\,,\\
\{f_1f_2,g\} &= f_1\{f_2,g\}+\{f_1,g\}f_2\,,\\
\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} &= \{\frac{\partial f}{\partial t},g\}+\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\{f,q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}\,,\quad \{f,p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}\,,$$

womit dann

$$\{q_i,q_k\}=0 \quad \{p_i,p_k\}=0 \quad \{p_i,q_k\}=\delta_{ik}$$

gilt.

(iii) Jacobi-Identität:

$$\{f_1,\{f_2,f_3\}\}+\{f_2,\{f_3,f_1\}\}+\{f_3,\{f_1,f_2\}\}=0$$

(iv) Poisson-Theorem: Seien f und g zwei Integrale der Bewegung, d.h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g = 0$, dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f,g\} = 0\,.$$

b) Betrachten Sie im folgenden den dreidimensionalen Fall in kartesischen Koordinaten, der Drehimpuls sei definiert durch

$$\vec{L} = \vec{q}\times\vec{p}\,.$$

Berechnen Sie

(i) $\{L_i,p_j\}$

(ii) $\{L_i,L_j\}$

(iii) Sei φ eine skalare Funktion von $\vec{q}$ und $\vec{p}$, d.h φ hängt nur von den Kombinationen $\vec{q}^2, \vec{p}^2, \vec{q}\cdot\vec{p}$ ab: $\varphi = \varphi(\vec{q}^2,\vec{p}^2,\vec{q}\cdot\vec{p})$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\{\varphi,L_z\} = 0\,.$$

(bitte wenden)

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik) Abgabe: Montag, 27.06.2011, 11:00 Uhr

Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik) Besprechung: Dienstag, 28.06.2011

Aufgabe 26: Teilchen im Magnetfeld 3 Punkte

Die Bewegung eines elektrisch geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld wird durch die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q(\phi(\vec{r}) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}))$$

beschrieben, wobei m die Masse und q die elektrische Ladung des Teilchens sind. ϕ ist das skalare und $\vec{A}$ das Vektorpotential.

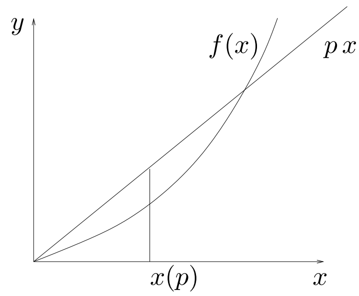
a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion auf.

b) Betrachten Sie nun den Fall $\phi = 0$ und $\vec{A}(\vec{x}) = (0, xB, 0)$. Dies führt über $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ auf ein konstantes Magnetfeld in z-Richtung. Stellen Sie für diesen Fall die kanonischen Gleichungen auf und lösen Sie sie.

Aufgabe 27: Legendre-Transformation 3 Bonuspunkte

Die Legendre-Transformation hat eine einfache geometrische Interpretation. Betrachten Sie eine konvexe Funktion $f(x)$ (konvex: $f''(x) > 0$). Betrachten Sie zusätzlich die Gerade $y = px$, $p > 0$. Sei $x(p)$ der Punkt, an dem die Kurve $f(x)$ am weitesten von der Geraden in vertikaler Richtung entfernt ist, d.h. die Funktion

$$F(p, x) = p\,x - f(x)$$



hat ein Maximum in Bezug auf x für $x = x(p)$. Die Legendre-Transformierte $g(p)$ ist dann definiert durch

$$g(p) = F(p, x(p))\,.$$

a) Berechnen Sie die Legendre-Transformierte von $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 1$

b) Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(p)$ heißen dual im Youngschen Sinne, falls sie die Legendre-Transformierte der jeweils anderen sind. Zeigen Sie die Youngsche Ungleichung

$$xp \leq f(x) + g(p)\,.$$

Zeigen Sie hiermit

$$px \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}p^2$$

und

$$px \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$$

mit $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, $x, p > 0$, $\alpha, \beta > 1$.

25. Aufgabe: Poisson-Klammer

(a) Schön, dass $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Ich meine, als Konstante fühlt man sich sicher gut. Man hat ein konstantes Leben. Konstante Einkünfte usw. Aber warum hat man mir diese Information jetzt mitgeteilt? In der ganzen Aufgabe kommt kein c vor. Ich verstehe es nicht...

(i) Zuerst die Linearität:

$$\{f_1 + f_2, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f_1 + f_2}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f_1 + f_2}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

und mit der Linearität der partiellen Differentation

$$\sum_i \left(-\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} + \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} + \frac{\partial f_2}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

umstellen:

$$\sum_i \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) + \sum_i \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$$

Annahme :

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$$

$$\begin{aligned}
\{f_1 f_2, g\} &= -\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} f_2 + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right) \frac{\partial g}{\partial p_i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_i} f_2 + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial p_i} \right) \frac{\partial g}{\partial q_i} \\
&= -\left(f_1 \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f_2}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) + f_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \right) \\
&= f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\}
\end{aligned}$$

Annahme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} &= -\left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial t} \right) \\
&= \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\{f, q_k\} = -\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_i}}_{=0} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_i}}_{0, i\neq k, 1, i=k}\right) = \frac{\partial f}{\partial p_k}$$

$$\{f, p_k\} = -\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial p_k}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial f}{\partial q_k}$$

$$\begin{aligned}
\{q_i, q_k\} &= \frac{\partial q_i}{\partial p_k} && = 0 \\
\{p_i, p_k\} &= -\frac{\partial p_i}{\partial q_k} && = 0 \\
\{p_i, q_k\} &= \frac{\partial p_i}{\partial p_k} && = \delta_{ik}
\end{aligned}$$

(iii) Verwende

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

$$\begin{aligned}
\{cf, g\} &= \sum_i \frac{\partial cf}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial cf}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \\
&= \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial cg}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial cg}{\partial p_i} \\
&= \{f, cg\} \\
&= c\{f, g\}
\end{aligned}$$

Dies gilt für alle Faktoren, auch eigentlich nicht konstante, sofern sie bei den Partiellen Ableitungen nach p und q als Konstant behandelt werden.
Damit und mit i) folgt , dass die Poisson-Klammern eine Bilineare-Funktion ist.
Für Bilineare Funktionen gilt die Jacobi-Identität und somit auch

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 0$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{f,g\} &= \frac{\partial\{f,g\}}{\partial f}\frac{df}{dt} + \frac{\partial\{f,g\}}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial\{f,g\}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial\{f,g\}}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial\{f,g\}}{\partial t} \\
&= \frac{\partial\{f,g\}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial\{f,g\}}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} \\
&= \{\frac{\partial f}{\partial q}\dot{q}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial q}\dot{q}\} + \{\frac{\partial f}{\partial p}\dot{p}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial p}\dot{p}\} + \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\} \\
&= \{\frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial p}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial g}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial g}{\partial t}\} \\
&= \{\frac{df}{dt}, g\} + \{f, \frac{dg}{dt}\} \\
&= \{0, g\} + \{f, 0\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) Verwende

$$\vec{L}_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\vec{q}_j\vec{p}_k$$

und

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$$

(i)

$$\begin{aligned}
\{L_i, p_j\} &= -\frac{\partial L_i}{\partial q_j} \\
&= -\sum_{k,l=1}^{3} \varepsilon_{ikl}\frac{\partial q_k}{\partial q_j}p_l \\
&= -\sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{ijl}p_l \\
&= \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{ilj}p_l
\end{aligned}$$

(ii) Verwende

$$\{L_i, L_j\} = -\{L_j, L_i\} \implies \{L_i, L_i\} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\{L_1, L_2\} = -\{L_2, L_1\} &\qquad = -q_1 p_2 + q_2 p_1 = -L_3 \\
\{L_1, L_3\} = -\{L_3, L_1\} &\qquad = -q_1 p_3 + q_3 p_1 = L_2 \\
\{L_2, L_3\} = -\{L_3, L_2\} &\qquad = -q_2 p_3 + q_3 p_2 = -L_1
\end{aligned}
$$

(iii)

$$L_z = q_x p_y - q_y p_x$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_z}{\partial q_x} &= p_y \\
\frac{\partial L_z}{\partial q_y} &= -p_x \\
\frac{\partial L_z}{\partial p_x} &= -q_y \\
\frac{\partial L_z}{\partial p_y} &= q_x \\
\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{q}^2} 2q_i + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{p}\vec{q}} p_i \\
\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{p}^2} 2p_i + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{p}\vec{q}} q_i
\end{aligned}
$$

Es folgt also

$$
\begin{aligned}
\{\varphi, L_z\} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p_x}\frac{\partial L_z}{\partial q_x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_y}\frac{\partial L_z}{\partial q_y} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_x}\frac{\partial L_z}{\partial p_x} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_y}\frac{\partial L_z}{\partial p_y} \\
&= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{p}^2} 2p_i + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{p}\vec{q}} q_i\right) p_y - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{p}^2} 2p_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{p}\vec{q}} q_y\right) p_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{q}^2} 2q_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{p}\vec{q}} p_x\right) q_y \\
&\quad - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{q}^2} 2q_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{p}\vec{q}} p_y\right) q_x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

26. Aufgabe: Teilchen im Magnetfeld

(a) Die Lagrange-Funktion kann erst einmal umgeschrieben werden:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q(\phi(\vec{r}) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r})) = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i^2 - q(\phi - \sum_{i=1}^{3} r_i \cdot A_i)$$

Jetzt müssen die Terme für den generalisierten Impuls aufgestellt werden. Für alle $i = 1, 2, 3$ gilt

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i + qA_i(\vec{r}) \qquad \dot{r}_i = \frac{p_i - A_i(\vec{r})}{m}$$

Mit dieser Identität lautet die Lagrangefunktion (hier sind ein paar Rechenschritte ausgelassen)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{3} \left(p_i^2 - (qA_i(\vec{r}))^2 \right) - q\phi(\vec{r})$$

Außerdem gilt natürlich

$$\sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i p_i = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{3} 2p_i^2 - 2p_i q A_i(\vec{r})$$

Also zusammengesetzt

$$H = \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i p_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}) \right)^2 - q\phi(\vec{r})$$

(b) Im angegebenen Fall vereinfacht sich die Hamiltonfunktion zu

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + p_z^2 + (p_y - qBx)^2 \right)$$

Die kanonischen Gleichungen liefern

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \qquad \dot{y} = \frac{p_y}{m} - \frac{qB}{m}x \qquad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$
$$\dot{p}_x = \frac{qB}{m}(p_y - qBx) \qquad \dot{p}_y = 0 \qquad \dot{p}_z = 0$$

Zuerst einmal erhält man $p_z = const$ und $\dot{z} = const$. Also ergibt sich in z-Richtung nur eine gleichfömrige Bewegung ohne Beschleunigung. Aus $\dot{x} = \frac{p_x}{m}$ folgt durch Ableiten

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m} = \frac{qB}{m^2}(p_y - qBx) \text{ und umgestellt } \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{qBp_y}{m^2} \text{ mit } \omega = \frac{qB}{m}$$

Und da aus $\dot{p}_y = 0$ auch $p_y = const$ folgt, gilt

$$x(t) = a_o \sin(\omega t) + b_o \cos(\omega t) + c_x \qquad c_x = \frac{p_y}{qB}$$

Also für die y-Richtung

$$\dot{y} = \frac{1}{m}\left(p_y - qBa_0\sin(\omega t) - qBb_0\cos(\omega t) - p_y\right) = -\omega(a_0\sin(\omega t) + b_0\cos(\omega t))$$

Durch Integrieren erhält man

$$y(t) = a_0\cos(\omega t) - b_0\sin(\omega t) + c_y$$

Also als Trajektorie eine Schraubenlinienellipse ;-)

27. Aufgabe: *Legendre-Transformation

(a)

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha} \implies F(p,x) = px - f(x) = px - \frac{x^\alpha}{\alpha}$$

Daraus ergibt sich für das Maximum von F

$$\frac{dF}{dx} = p - x^{\alpha-1} \stackrel{!}{=} 0 \implies x = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Also ergibt sich für die Transformation

$$g(p) = p^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha}p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

$$\begin{aligned} f(x) + g(p) &\geq f(x) + F(x,p) \\ &= f(x) + px - f(x) \\ &= px \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung gezeigt.

Sei nun

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \implies g(p) = \frac{1}{2}p^2$$

Die Ungleichung

$$xp \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}p^2$$

folgt somit für $\alpha = 2$ aus der Young'schen Ungleichung. Für allgemeine alpha ergibt sich $g(p) = p^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha}p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{p^\beta}{\beta}$ mit

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Dies ist für $\alpha > 1$ ebenfalls $\beta > 1$ und $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$. Mit der Young'schen Ungleichung gilt dann

$$px \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$$

Aufgabe 28: Subharmonische Schwingungen — 2 Punkte

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \epsilon x^3 = f_0 \cos \Omega t\,.$$

Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen das System mit der Frequenz $\Omega/3$ schwingen kann.

Aufgabe 29: Intermodulation — 3 Punkte

Nicht-lineare Schwinger unterliegen nicht dem Superpositionsprinzip. Untersuchen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \epsilon x^2 = f_1 \cos \Omega_1 t + f_2 \cos \Omega_2 t$$

in erster Ordnung in Störungstheorie.

Aufgabe 30: Satz von Liouville — 5 Punkte

Untersuchen Sie die eindimensionale Bewegung eines Teilchens unter dem Einfluss der Gewichtskraft mg.

a) Skizzieren Sie für drei verschiedene Energien die Bahnen im Phasenraum.

b) Berechnen Sie das durch $p_1 < p < p_2$ und $E_1 < E < E_2$ definierte Phasenraumvolumen Φ. Dabei ist p der zur Koordinate z gehörige verallgemeinerte Impluls und E die Energie.
Hinweis:

$$\Phi = \iint \mathrm{d}p\, \mathrm{d}z \Theta(p - p_1)\Theta(p_2 - p)\Theta(E - E_1)\Theta(E_2 - E)$$

c) Jeder Punkt des Phasenraums in dem unter b) definierten Gebiet entspricht einer speziellen Anfangsbedingung. Die Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen beschreiben die zeitliche Entwicklung einer gegebenen Anfangsbedingung im Phasenraum. Mit anderen Worten: zu einem späteren Zeitpunkt hat sich das unter b) definierte Gebiet im Phasenraum fortbewegt. Berechnen Sie das Phasenraumvolumen zu einem späteren Zeitunkt. Skizzieren Sie das Ergebnis.

28. Aufgabe: Subharmonische Schwingungen

Lösungsansatz

$$x(t) = A\cos\left(\frac{\Omega}{3}t + \varphi\right)$$

Außerdem gilt

$$\cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$$

Dann ergibt sich in durch die DGL

$$-A\frac{\Omega^2}{9}\cos\left(\frac{\Omega}{3}t + \varphi\right) + \omega_0^2 A\cos\left(\frac{\Omega}{3}t + \varphi\right) - \varepsilon A^3\left(\frac{3}{4}\cos\left(\frac{\Omega}{3}t + \varphi\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\Omega t + 3\varphi\right)\right) = f_0\cos\left(\Omega t\right)$$

Es zeigt sich offensichtlich, dass

$$\varphi = 0$$

Umgeformt ergibt dies durch Koeffizientenvergleich die beiden Bedingungen

$$-\frac{1}{4}\varepsilon A^3 = f_0$$
$$-\frac{\Omega^2}{9} + \omega_0^2 - \frac{3}{4}\varepsilon A^2 = 0$$

Somit folgt

$$A = -\sqrt[3]{\frac{4f_0}{\varepsilon}}$$
$$\frac{\Omega}{3} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{3}{4}\epsilon A^2}$$
$$\frac{\Omega}{3} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{3\varepsilon A^2}{4\omega_0^2}}$$

Damit dies eine Schwingung ist, muss A reell sein, was dadurch gegeben ist, dass f_0 und ε reell sind.
Damit dies eine echte Schwingung ist, muss A reell sein, laut der zweiten Gleichung gilt aber auch

$$A^2 = \frac{4}{3\varepsilon}\left(\omega_0^2 - \frac{\Omega^2}{9}\right)$$

Unter der Annahme , dass $\varepsilon > 0$, folgt als Bedingung ans System

$$\omega_0 > \frac{\Omega}{3}$$

29. Aufgabe: Intermodulation

Für die 0-te Ordnung ergibt sich

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = f_1 \cos(\Omega_1 t) + f_2 \cos(\Omega_2 t)$$

Und für die 1-te Ordnung

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = x_0^2$$

Für die $0-$te Ordnung ergibt sich als Ansatz

$$x(t) = \sum_{i=1}^{2} A_i \cos(\Omega_i t)$$

Die DGL liefert

$$\left(\omega_0^2 - \Omega_i^2\right) A_i \cos(\Omega_i t) = f_i \cos(\Omega_i t)$$

und somit

$$A_i = \frac{f_i}{\omega_0^2 - \Omega_i^2}$$

Es folgt dann

$$x_0(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \sum_{i=1}^{2} A_i \cos(\Omega_i t)$$

Verwende die folgenden Additionstheoreme

$$2A_1A_2\cos(\Omega_1 t)\cos(\Omega_2 t) = A_1A_2\left(\cos\left((\Omega_1+\Omega_2)t\right) + \cos\left((\Omega_1-\Omega_2)t\right)\right)$$
$$2BA_i\cos(\omega_0 t)\cos(\Omega_i t) = BA_i\left(\cos\left((\Omega_i+\omega_0)t\right) + \cos\left((\Omega_i-\omega_0)t\right)\right)$$

Sowie

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\
&= 2\cos^2(x) - 1 \\
\cos^2(x) &= \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + 1\right) \\
\sin^2(x) &= 1 - \cos^2(x) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right)
\end{aligned}$$

Und damit

$$\begin{aligned}
A_i^2 \cos^2(\Omega_i t) &= \frac{1}{2}\left(A_1^2 \cos(2\Omega_i t) + 1\right) \\
B^2 \cos^2(\omega_0 t) &= \frac{1}{2}\left(B^2 \cos(2\omega_0 t) + 1\right) \\
\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) &= \cos(\varphi + \varphi)\cos(\varphi - \varphi) && = \cos(2\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_0^2 = \frac{1}{2}(A^2 + B^2 + A_1^2 + A_2^2) + \frac{1}{2}\left(A^2\cos(2\omega_0 t) + B^2\cos(\omega_0 t) + \sum_{i=1}^{2} A_i^2 \cos(2\Omega_i t)\right) \\
+ AB\sin(2\omega_0 t) \sum_{i=1}^{2} AA_i \left[\cos((\Omega_i + \omega_0)t) + \cos((\Omega_i - \omega_0)t)\right] \\
+ \sum_{i=1}^{2} BA_i \left[\sin((\Omega_i + \omega_0)t) - \sin((\Omega - \omega_0)t)\right] + A_1A_2\left(\cos((\Omega_1 + \Omega_2)t) + \cos((\Omega_2 - \Omega_1)t)\right)
\end{aligned}$$

Vorkommende Frequenzen, $2\omega_0, 2\Omega_1, 2\Omega_2, \Omega_1 + \omega_0, \Omega_1 - \omega_0, \Omega_2 + \omega_0, \Omega_2 - \omega_0, \Omega_1 - \Omega_2, \Omega_1 + \Omega_2$

$$
\begin{aligned}
x_{1,p} = & \frac{1}{2\omega_0^2}\left(A^2 + B^2 + A_1^2 + A_2^2\right) - \frac{A^2}{2}\frac{1}{3\omega_0^2}\cos(2\omega_0 t) - \frac{B^2}{6\omega_0^2}\cos(2\omega_0 t) \\
& + \sum_{i=1}^{2}\frac{A_i^2}{2}\frac{1}{\omega_0^2 - 4\Omega_i^2}\cos(2\Omega_i t) + AB\frac{1}{-3\omega_0^2}\sin(2\omega_0 t) + \sum_{i=1}^{2}\frac{A_i A}{\omega_0^2 - (\Omega_i + \omega_0)^2}\cos((\Omega_i + \omega_0)t) \\
& + \sum_{i=1}^{2}\frac{A_i A}{\omega_0^2 - (\Omega_i - \omega_0)^2}\cos((\Omega_i - \omega_0)t) \\
& + B\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{A_i}{\omega_0^2 - (\Omega_1 + \omega_0)^2}\sin((\Omega_1 + \omega_0)t) - \frac{A_i}{\omega_0^2 - (\Omega_i - \omega_0)^2}\sin((\Omega_i - \omega_0)t\right] \\
& + A_1 A_2\left(\frac{1}{\omega_0^2 - (\Omega_2 + \Omega_1)^2}\cos((\Omega_1 + \Omega_2)t) + \frac{1}{\omega_0^2 - (\Omega_2 - \Omega_1)^2}\cos((\Omega_1 - \Omega_2)t\right)
\end{aligned}
$$

Und als Gesamtlösung

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$$

30. Aufgabe: Satz von Liouville

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$$

Also

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \implies \dot{z} = \frac{p}{m}$$

Damit

$$H = \dot{z}p - \mathcal{L} = \frac{p}{m}p - \frac{p}{2m} + mgz = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + mgz$$

Die Energie ist konstant mit

$$E = H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + mgz$$

(a) Die Skizzen sind entstanden mit

$$g = 9.81\frac{m}{s^2}, m = 1kg$$

und den in den Bildunterschriften gegebenen Anfangswerten

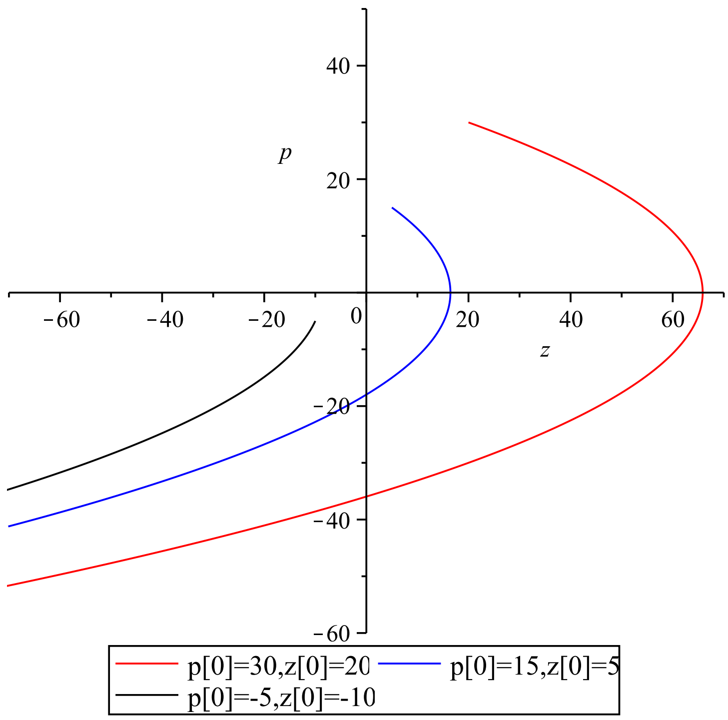


Abbildung 1: $t = 0..10$

(b) Laut Vorwort gilt dann

$$z = \frac{E}{mg} - \frac{p^2}{2m}$$

Daraus folgt

$$\frac{dz}{dE} = \frac{1}{mg}$$

und somit

$$dz = \frac{dE}{mg}$$

Variante 1 $\int dz \to \int \frac{1}{mg} dE$, betrachte hierbei $dp = 0$

$$\begin{aligned}\phi &= \int_{p_1}^{p_2} \int_{E_1}^{E_2} \frac{1}{mg} dE \\ &= \frac{(p_2 - p_1)(E_2 - E_1)}{mg}\end{aligned}$$

Variante 2

$$\phi = \int dp\theta(p-p_1)\theta(p_2-p)\cdot\int dz\theta(\frac{p^2}{2m}+mgz-E_1)\theta(E_2-\frac{p^2}{2m}-mgz)$$

Dies liefert als Integrationskonstanten, da $\theta(x)=1 \iff x>0$

$$\phi = \int\limits_{p_1}^{p_2} dp \int\limits_{\frac{1}{mg}(E_1-\frac{p^2}{2m})}^{\frac{1}{mg}(E_2-\frac{p^2}{2m})} dz = \int\limits_{p_1}^{p_2} dp\frac{1}{mg}(E_2-E_1) = \frac{(E_2-E_1)(p_2-p_1)}{mg}$$

(c) Mit den Kanonischen Gleichungen folgt

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -\dot{p} = mg \implies p(t) = -mgt+p_0$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{z} = \frac{p}{m} = -gt+\frac{p_0}{m} \implies z(t) = z_0+\frac{p_0}{m}t-\frac{1}{2}gt^2$$

Somit gilt für die Energie

$$E = H = \frac{1}{2m}\left(p_0^2-2p_0mgt+m^2g^2t^2\right)+mgz_0+gp_0t-\frac{1}{2}mg^2t^2 = \frac{p_0^2}{2m}+mgz_0$$

Also ist die Enerige konstant.
Sei $p_2=p_2(t)$ mit der Energie E_2 und $p_1=p_1(t)$ mit der Energie E_1 Somit ist

$$E_2-E_1 = const$$

und

$$p_2(t)-p_1(t) = p_2-mgt-p_1+mgt = p_2-p_1 = const$$

Somit ist das Volumen erhalten.

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)

Abgabe: Montag, 11.07.2011, 11 Uhr
Besprechung: Dienstag, 12.07.2011

Wichtig: Die Modulprüfung findet am 21.07.2011 von 14:00 – 17:00 im Gerthsen Hörsaal (Nachnamen A-K) und im Audimax (Nachnamen L-Z) statt. Zugelassenes Hilfsmittel ist ein doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt.
Melden Sie sich im Studierendenportal vom **14.07.2011** bis zum **19.07.2011** für die Modulprüfung an. Falls Sie die Vorleistungen erbracht haben, aber sich aus technischen Gründen nicht im Studierendenportal anmelden können, füllen Sie bitte das Formular `http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~marquard/anmeldung.pdf` aus und werfen Sie es in den Briefkasten im Erdgeschoss des Physik-Hochhauses.

Aufgabe 31: Trägheitstensoren — 6 Punkte

Der Trägheitstensor eines starren Körpers ist definiert durch

$$I_{ij} = \int \rho(x_1, x_2, x_3)(\vec{x}^2\delta_{ij} - x_i x_j)\mathrm{d}V\,,$$

wobei $\rho(x_1, x_2, x_3)$ der Dichteverteilung des Körpers entspricht.

a) Berechnen Sie den Trägheitstensor für Rotationen um den Schwerpunkt für

(i) einen homogenen Quader mit den Seitenlängen a, b, c

(ii) einen homogenen Zylinder mit Höhe h und Radius r

(iii) eine homogene Kugel mit Radius r

(iv) einen dünnen Reifen mit Radius r

b) Zeigen Sie, dass der Trägheitstensor in einem aus dem Schwerpunkt um den Vektor $\vec{a}$ verschobenen Koordinatensystem durch

$$I_{ij} = I^S_{ij} + M(\vec{a}^2\delta_{ij} - a_i a_j)$$

gegeben ist. Hierbei ist I^S_{ij} der Trägheitstensor im Schwerpunktssytem und M die Gesamtmasse.

c) Zeigen Sie, dass sich der Trägheitstensor unter Drehungen des körperfesten Koordinatensystems wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert, d.h.

$$\hat{I}_{ij} = A_{im}A_{jn}I_{mn}\,.$$

A ist die orthogonale Drehmatrix, deren Elemente $A_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{\hat{e}}_j$ aus den Skalarprodukten der Basisvektoren der Koordinatensysteme gebildet werden. Bei Drehung des Koordinatensystems transformieren sich die Koordinaten eines Vektors wie $\hat{x}_i = A_{ij}x_j$.

(bitte wenden)

Aufgabe 32: kräftefreie Kreisel 4 Punkte

Die Rotation eines starren Körpers wird am einfachsten durch die Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_1 - (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 &= N_1\,, \\ I_2\dot{\Omega}_2 - (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1 &= N_2\,, \\ I_3\dot{\Omega}_3 - (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 &= N_3 \end{aligned}$$

beschrieben. Hierbei sind I_i die Trägheitsmomente, Ω_i die Projektion der Winkelgeschwindigkeit auf das körperfeste Koordinatensystem und N_i die angreifenden Drehmomente. Das körperfeste Koordinatensystem wurde so gewählt, dass es mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfällt. Betrachten Sie im folgenden den Spezialfall des symmetrischen Kreisels, d.h. mit $I_1 = I_2$, ohne äussere Drehmomente, $N_i = 0$.

a) Lösen Sie die Euler-Gleichungen für diesen Spezialfall.

b) Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ hängt mit den Euler-Winkeln φ, ϑ, ψ über

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\psi\,\dot{\varphi} + \cos\psi\,\dot{\vartheta} \\ \sin\vartheta\cos\psi\,\dot{\varphi} - \sin\psi\,\dot{\vartheta} \\ \cos\vartheta\,\dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{1}$$

zusammen. Bestimmen Sie unter Verwendung des Ansatzes $\vartheta(t) = \vartheta_0 = \text{const}$ und mit Hilfe obigen Zusammenhangs die zeitliche Änderung der Euler-Winkel.

c) Diskutieren Sie die Ergebnisse.

31. Aufgabe: Trägheitstensoren

(a) Hier sind immer konstante Dichten vorhanden.

Quader Sei a die Kante zur $x - Achse$ parallel, b die Kante zur $y - Achse$ und c die Kante zur $z - Achse$.

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \varrho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 + z^2 dxdydz \\
&= \varrho a \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 + z^2 dydz \\
&= \varrho a \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{1}{3}(\frac{b^3}{4}) + bz^2 \ dz \\
&= \frac{1}{12} \varrho abc \left(b^2 + c^2\right) \\
&= \frac{1}{12} m(b^2 + c^2) \\
I_{yy} &= \frac{1}{12} m(a^2 + c^2) \\
I_{zz} &= \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \\
I_{xy} &= -\varrho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} xydxdydz \\
&= -\varrho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 0dydz \\
&= 0 \\
&= I_{yx} \\
I_{xz} &= I_{zx} \\
&= 0 \\
I_{yz} &= I_{zy} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Insgesamt also

$$I = \frac{1}{12} m \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Homogener Zylinder R sei der Radius und H sei die Höhe, $\varrho = \frac{m}{\pi R^2 H}$. Der Zylinder stehe in der x-y Ebene. Wähle als Koordianten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$$

Womit sich für das Volumenelement ergibt

$$dV = \det J_{\vec{r}} d\phi dr dz = r dr d\phi dz$$

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \varrho \int \int \int y^2 + z^2 dx dy dz \\
&= \varrho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \sin^2(\phi) + r z^2 dr d\phi dz \\
&= \frac{1}{12} m \left(h^2 + 3R^2\right) \\
I_{22} &= \frac{1}{12} m \left(h^2 + 3R^2\right) \\
I_{33} &= \frac{1}{2} m R^2 \\
I_{12} &= I_{21} \\
&= 0 \\
I_{13} &= I_{31} \\
&= 0 \\
I_{23} &= I_{32} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Also

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}m\left(h^2+3R^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m\left(h^2+3R^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$$

Homogene Kugel Für die Homogene Kugel gilt $\varrho = \frac{3m}{4\pi R^3}$, für das Volumentelement gilt $dV = r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta$ mit $r = 0..R, \phi = -\pi..\pi, \theta = 0..\pi$

$$I = \frac{2}{5}mR^2\mathbb{1}$$

Dünner Reifen Als Dichte wähle $\varrho = \frac{m}{2\pi rh}$ Dann gilt weiterhin in Zylinderkoordinaten wieder $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z = z, dV = rdrd\phi dz$ Hier ergibt sich dann

$$I_{ij} = \lim_{h\to 0} \frac{m}{2\pi rh} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} \delta_{ij}\vec{r}^2 - x_i x_j d\phi dz$$

Beispiel-Rechnung:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int\limits_{0}^{2\pi} r^3\sin^2(\phi) + rz^2 d\phi dz \\ &= \frac{m}{2}\left(\frac{1}{6}h^2 + r^2\right) \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2}mr^2 \end{aligned}$$

$$I = \begin{pmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & r^2m \end{pmatrix} = mr^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) *Satz von Steiner*

Laut Definition ist der Trägheitstensor

$$I = \int (\delta_{jk}\vec{r}_i^2 - x_j^i x_k^i) dm$$

Ist nun der Körper um den Vektor $\vec{a}$ aus dem Schwerpunktsystem verschoben, so gilt für den gesamten Tensor

$$I_{ges} = \int \left(\delta_{jk}\left(\vec{r}_i + \vec{a}\right)^2 - (x_j^i + a_j)(x_k^i + a_k)\right) dm$$

Und somit

$$\begin{aligned} I_{ges} &= \int \left(\delta_{jk}\vec{r}_i^2 - x_j^i x_k^i + 2\delta_{jk}\vec{r}_i\vec{a} - x_j^i a_k - x_k^i a_j + \delta_{jk}\vec{a}^2 - a_j a_k\right) dm \\ &= \int \delta_{jk}\vec{r}_i^2 - x_j^i x_k^i dm + \int \delta_{jk}\vec{a}^2 - a_j a_k dm + \int 2\delta_{jk}\vec{r}_i \cdot \vec{a} - x_j^i a_k - x_k^i a_j dm \end{aligned}$$

Der letzte Summand fällt aufgrund der Schwerpunktdefinition weg, somit folgt

$$I_{ges,jk} = I_{jk}^S + M\left(\delta_{jk}\vec{a}^2 - a_j a_k\right)$$

(c) Bei Basistransformation durch die Transformationsmatrix A gilt

$$\hat{I} = AIA^{-1}$$

Da A eine orthogonale Matrix ist, so gilt

$$A^{-1} = A^T$$

Somit

$$\hat{I} = AIA^T$$

und damit

$$\hat{I}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} A_{ik} I_{kl} A_{lj}^T = \sum_{k,l=1}^{n} A_{ik} A_{jl} I_{kl}$$

$$x' = Rx \qquad x_i' = R_{ij} x_j$$

$$dx_1' dx_2' dx_3' = |\det R| dx_1 dx_2 dx_3 = dx_1 dx_2 dx_3$$

$$I_{ij}' = \int \varrho \left(R_{kn} x_n R_{km} x_m \delta_{ij} - R_{in} x_n R_{jm} x_m\right) dV$$

Verwende

$$RR^t = \mathbb{1} \qquad \sum_k R_{kn} R_{km} = \delta_{mn}$$

$$
\begin{aligned}
R_{in}R_{jm}\delta_{nm} &= R_{im}R_{jm} = \delta_{ij} \\
I'_{ij} &= \int \varrho \left(x^2\delta_{ij} - R_{in}x_nR_{jm}x_m\right) dV \\
&= R_{in}R_{jm}I_{nm}
\end{aligned}
$$

32. Aufgabe: Euler-Kreisel-Gleichungen

Die Differentialgleichungen vereinfachen sich zu

$$
\begin{aligned}
I_1\dot{\Omega}_1 - (I_1 - I_3)\Omega_2\Omega_3 &= 0 \\
I_1\dot{\Omega}_2 - (I_3 - I_1)\Omega_1\Omega_3 &= 0 \\
I_3\dot{\Omega}_3 &= 0
\end{aligned}
$$

(a) Aus der letzten Gleichung folgt

$$\Omega_3 = const$$

Damit redzuiert sich das System auf

$$
\begin{aligned}
I_1\dot{\Omega}_1 - (I_1 - I_3)\Omega_2\Omega_3 &= 0 \\
I_1\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Dies lässt sich schreiben als

$$I_1 \begin{pmatrix} \dot{\Omega}_1 \\ \dot{\Omega}_2 \end{pmatrix} + (I_1 - I_3)\Omega_3 \begin{pmatrix} -\Omega_2 \\ \Omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Idee, eine Ableiten und in die zweite einsetzen

Erste Gleichung einmal Ableiten und nach $\dot{\Omega}_2$ auflösen bringt

$$\dot{\Omega}_2 = \frac{I_1}{\Omega_3(I_1 - I_3)}\ddot{\Omega}_1$$

Das eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt

$$\ddot{\Omega}_1 + \omega^2\Omega_1 = 0$$

mit

$$\omega = \frac{\Omega_3}{I_1}(I_1 - I_3)$$

Somit

$$\Omega_1(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$$

Damit ergibt sich

$$\dot{\Omega}_2 = \omega\left(A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)\right)$$

Dies gibt mit einmaligem Integrieren

$$\Omega_2(t) = A_1 \sin(\omega t) - B_1 \cos(\omega t) + C$$

Einsetzen in die Ursprungsgleichungen ergibt

$$C = 0$$

(b) Mit den Eulerwinkeln ergibt sich für die drei Gleichungen mit

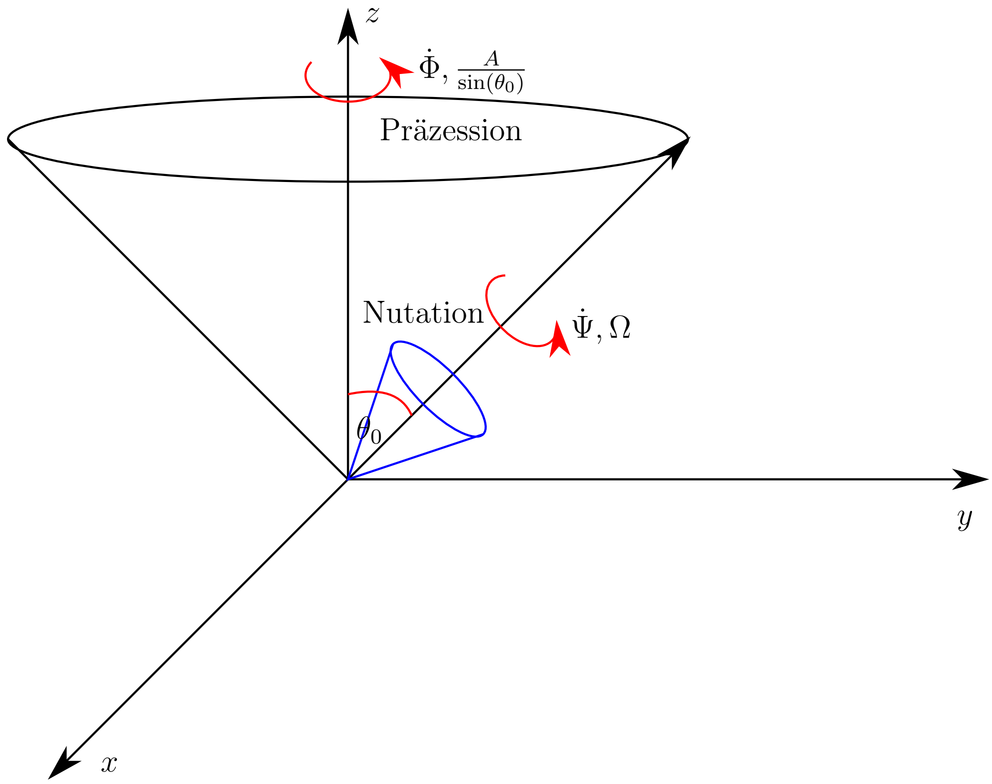
$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= A \cos(\Omega t + \delta) \\
\Omega_2 &= A \sin(\Omega t + \delta) \\
\Omega_3 &= \Omega_3
\end{aligned}$$

$$A^2 = \sin^2\theta_0 \dot{\phi}^2 \implies \dot{\phi} = \frac{A}{\sin\theta_0} \implies \phi = \frac{A}{\sin\theta_0} t + \phi_0$$

$$\cos(\Omega t + \delta) = \sin\psi \qquad \sin(\Omega t + \delta) = \cos\psi$$

Damit folgt

$$\psi(t) = -\Omega t - \delta + \frac{\pi}{2}$$


z
$\dot{\Phi}, \frac{A}{\sin(\theta_0)}$
Präzession
Nutation
$\dot{\Psi}, \Omega$
θ_0
y
x

(c)