

Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 1

Besprechung: Di, 24.04.12

Aufgabe 1: Vektoranalysis

- (a) Verifizieren Sie folgende Formel, wobei $f(\vec{x})$ eine skalare Funktion sei und \vec{a} einen konstanten Vektor bezeichne:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \text{grad } f) = \vec{a} \Delta f - \text{grad}(\vec{a} \cdot \text{grad } f)$$

- (b) Berechnen Sie grad, div und rot von

(i) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^3 - z$,
(ii) $\vec{A}(\vec{r}) = (2y - z, x^2, x^3 - y)^T$.

Aufgabe 2: Kraftfeld

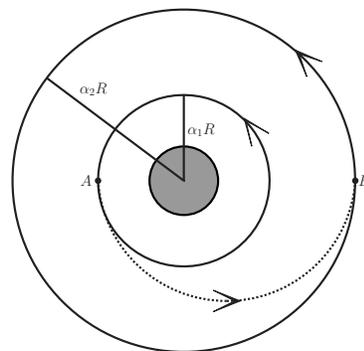
Gegeben sei das Kraftfeld

$$F_x = -\frac{Fy}{x^2 + y^2}, \quad F_y = \frac{Fx}{x^2 + y^2}, \quad F_z = 0, \quad F = \text{const.} .$$

- (a) Berechnen Sie $\text{rot } \vec{F}(\vec{x})$. Ist diese Rechnung an jedem Raumpunkt eindeutig?
- (b) Geben Sie – wo möglich – ein Potential $U(\vec{x})$ zu diesem Kraftfeld an. Skizze! Tragen Sie in dieselbe Zeichnung auch das Vektorfeld \vec{F} ein.
- (c) Bestimmen Sie das Arbeitsintegral für einen (im Uhrzeigersinn orientierten) Kreis in der xy -Ebene mit Radius R und Mittelpunkt $(2R, 0, 0)^T$. Interpretation!
- (d) Berechnen Sie nun das Arbeitsintegral für einen Kreis mit Radius R und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt. Interpretation!

Aufgabe 3: Hohmann-Transfer

Um Satelliten auf eine geostationäre Bahn zu bringen, werden sie zunächst von der Trägerrakete in eine niedrige, kreisförmige, Erdumlaufbahn (Radius $\alpha_1 R$ mit Erdradius R) eingeschossen. Der Transfer in den höhergelegenen geostationären Orbit (Radius $\alpha_2 R$) kann dann über einen sog. *Hohmann-Transfer* [1] erfolgen. Dieser ist die energetisch günstigste Möglichkeit, bedingt aber eine recht große Transferzeit.



Dazu erfolgt eine erste Bahnkorrektur im Punkt A , typischerweise durch eine Oberstufe der Trägerrakete. Die Bahn wird aufgeweitet auf die gestrichelt gezeichnete Verbindungsbahn, die der halbe Bogen einer Kepler-Ellipse ist, deren einer Brennpunkt im Zentrum der Erde und der Kreisbahnen liegt und deren große Halbachse halb so groß ist wie die Entfernung zwischen A und B .

Im Punkt B erfolgt durch den Apogäumsmotor des Satelliten eine weitere Bahnkorrektur, die die Satellitenbahn zur geostationären Kreisbahn mit Radius $\alpha_2 R$ aufweitet.

- Berechnen Sie zunächst die zu den beiden Kreisbahnen gehörenden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 .
- Wie groß muss die Geschwindigkeitsänderung (Richtung und Betrag) im Punkt A sein, damit der Satellit auf die *Hohmann*-Ellipse kommt? Wie groß muss sie im Punkt B sein, damit er von der Ellipsenbahn auf die Kreisbahn R_2 gelangt? Schreiben Sie die Ergebnisse als Vielfache der Fluchtgeschwindigkeit $\sqrt{2gR}$.
- Wie lang ist die Flugdauer von A nach B ?

Nützliche Formeln für Kepler-Ellipsen:

- Exzentrizität $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$ mit E Energie des Satelliten, μ reduzierte Masse m_S des Satelliten (hier $\mu \simeq m_S$), α Koeffizient des Potentials und Drehimpuls $L \equiv |\vec{L}| = |\vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})|$,
- Abstand Brennpunkt-Mittelpunkt $e = a\epsilon$,
- $a = \frac{\alpha}{2|E|}$,
- Umlaufdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}a^3}$.

[1] Walter Hohmann, *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper*, Oldenbourg, München 1925