# Klassische Theoretische Physik II

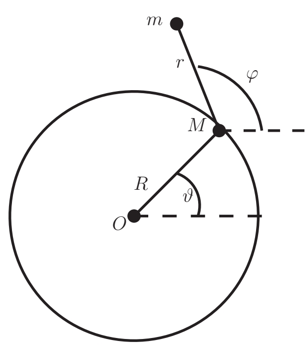
V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

## Übungsblatt 4

Abgabe: Fr, 18.05.12
Besprechung: Di, 22.05.12

### Aufgabe 9: Rotierende Hantel (*3+5+2=10 Punkte*)

Betrachten Sie folgendes ebenes (x-y-Ebene) System:
Zwei punktförmige Massen $m$ und $M$ sind mittels einer starren masselosen Stange der Länge $r$ verbunden. Weiterhin ist die Masse $M$ mit einer starren Stange der Länge $R$ am Fixpunkt $O$ befestigt. Das System ist um $O$ bzw. $M$ jeweils frei drehbar.




(a) Wie lautet die Lagrangefunktion, wenn das System keinen weiteren Einschränkungen unterliegt? Gibt es Erhaltungsgrößen?

(b) Nun werde die Masse $M$ vom einem Motor mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ angetrieben: $\vartheta = \Omega t$. Wie lautet nun die Lagrangefunktion für die Masse $m$? Stellen Sie die Lagrangegleichung für den Winkel $\varphi$ auf und integrieren Sie sie. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung in die Form

$$\dot{u}^2 = \omega_0^2 - \frac{4R\Omega^2}{r}\sin^2\frac{u}{2}$$

mit $u = \varphi - \Omega t$ gebracht werden kann. Welche Bedeutung besitzt $\omega_0$?

(c) Integrieren Sie die Bewegungsgleichung für den Sonderfall $r\omega_0^2 = 4R\Omega^2$.

**Aufgabe 10: Teilchen im Magnetfeld** (*0.5+5+3+1.5=10 Punkte*)

Auf ein elektrisch geladenes Teilchen mit Masse $m$ und Ladung $Q = qe$ (Elementarladung $e \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} As$) wirkt die Lorentzkraft

$$\vec{F} = Q \cdot \left( \vec{E}(\vec{r},t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r},t) \right) \ .$$

(a) Wieso lässt sich $\vec{F}$ nicht als Gradient eines Potentials $V(\vec{r},t)$ ausdrücken?

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass das Potential gegeben ist durch

$$\begin{aligned} V(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) &= Q\ \Phi(\vec{r},t) - Q\ \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) \\ \text{mit } \vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \ . \end{aligned}$$

(b) Betrachten Sie eine zeitunabhängige, homogene magnetische Induktion der Form $\vec{B} = B\vec{e}_z$, $\Phi = 0$. Wie sieht in kartesischen Koordinaten das Potential aus, das dieses $\vec{B}$-Feld ergibt?
Schreiben Sie dieses in Zylinderkoordinaten um mit Einheitsvektoren $\vec{e}_\varrho$, $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_z$, also geben Sie $V_\varrho$, $V_\varphi$ und $V_z$ als Funktion von $\varrho$, $\varphi$ und $z$ an.
Schreiben Sie damit die Lagrange-Funktion in Zylinderkoordinaten.
*Zwischenergebnis*: $\vec{A} = \frac{1}{2} B \varrho \vec{e}_\varphi$.

(c) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. Welche Variablen sind zyklisch und welche Größen sind folglich erhalten?

(d) Finden Sie die Lösungen der Bewegungsgleichungen für konstantes $\varrho$.