Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 5

Abgabe: Fr, 25.05.12
Besprechung: Di, 29.05.12

Aufgabe 11: Eigenvektoren – Teil 2 (*3+3=6 Punkte*)

Wir betrachten nochmal die Matrix M aus Aufgabe 6:

$$M = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 10 \\ 8 & 10 & -5 \end{pmatrix} .$$

Dort hatten wir gefunden, dass die Eigenwerte $\lambda_{1,2,3} = 9, -9, -18$ sind, sowie einen Eigenvektor $\vec{v}_1 = (1, 2, 2)^T$ berechnet.

(a) Finden Sie Eigenvektoren zu den anderen beiden Eigenwerten.

(b) Aus den **normierten** Eigenvektoren lässt sich eine Matrix $U = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ bilden. Berechnen Sie ihre Determinante. Zeigen Sie, dass U orthogonal ist. Außerdem diagonalisiert sie M via $M_D = U^T M U$. Wie sieht M_D aus? Welche Einträge stehen auf der Diagonalen?
(Alle Rechnungen mit den aus M folgenden Werten, nicht allgemein.)

Aufgabe 12: Integration der Euler-Lagrange-Gleichungen (*2+1=3 Punkte*)

(a) Häufig hängt der Integrand $F(y, y')$ nicht explizit von x ab. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

gilt.

(b) Hängt der Integrand $F(x, y')$ hingegen nicht von y ab, gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.} \; .$$

Aufgabe 13: Hochspannungsleitung (*3+6+2=11 Punkte*)

Über den Rhein wird eine Hochspannungsleitung gespannt. Auf beiden Seiten des Rheinufers stehen Masten, die die Leitung festhalten. Aus topographischen Gründen ist dabei der Mast auf Karlsruher Seite höher als in Maximiliansau. Dazwischen hängt die Leitung (Kabellänge L zwischen den beiden Masten und konstante Masse pro Längeneinheit ϱ) unter ihrem eigenen Gewicht frei durch.
Für die Rechnung kann es hilfreich sein, den Ursprung in den Aufhängepunkt des Kabels in Maximilansau zu legen.

(a) Stellen Sie die Bedingungen an das Seil als Gleichungen auf. Finden Sie die integrierte Form der Bewegungsgleichungen und lösen Sie sie nach y' auf.
Die Integrationskonstante kann einfach mit c bezeichnet werden, diese bestimmen wir später.
Ergebnis: $y' = \pm\sqrt{\left(\frac{\varrho g y+\lambda}{c}\right)^2 - 1}$

(b) Integrieren Sie die Gleichung für y' nochmals. Betrachten Sie dabei die beiden Bereiche links und rechts vom Punkt $(x_{\mathrm{min}}, y_{min})$, wo die Leitung den tiefsten Punkt erreicht, separat. Bestimmen Sie x_{min} und y_{min} als Funktion der auftretenden Konstanten.
Ergebnis: $y(x) = \frac{c}{\varrho g}\cosh\left(\frac{\varrho g x}{c} - \operatorname{arcosh}\frac{\lambda}{c}\right) - \frac{\lambda}{\varrho g}$

(c) Stellen Sie aus den verbleibenden Bedingungen zwei (transzendente) Gleichungen auf, aus denen sich λ und c bestimmen lassen würden.