

Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 6

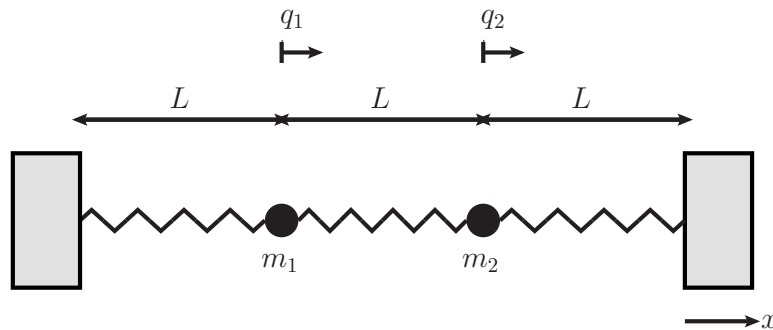
Abgabe: Fr, 01.06.12

Besprechung: Di, 05.06.12

Aufgabe 14: Gekoppelte Oszillatoren

(3+1+3+3+2=12 Punkte)

Zwei Massenpunkte m_1 und m_2 sind miteinander und mit den Wänden rechts und links über identische Federn verbunden (s. Skizze; eindimensionales Problem). Diese schwingen um ihre Ruhelage mit Federkonstante κ . Sonstige Kräfte wie Schwerkraft sollen nicht wirken, außerdem wollen wir nur kleine, lineare Schwingungen betrachten. Die Auslenkung des Massenpunkts m_i aus seiner Ruhelage werde mit q_i bezeichnet ($i = 1, 2$).



- Stellen Sie die Lagrange-Funktion für die Auslenkungen q_i auf und leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.
- Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform

$$M\ddot{\vec{q}} + K\vec{q} = \vec{0}$$

mit $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ und den 2×2 -Matrizen M und K . Bringen Sie diese in die Form $\ddot{\vec{q}} = -A\vec{q}$ mit einer 2×2 -Matrix A . Verwenden Sie die Abkürzungen $\omega_i^2 = \frac{\kappa}{m_i}$.

- Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A .
(Bei der Berechnung der Eigenvektoren und in der folgenden Teilaufgabe brauchen die Eigenwerte nicht explizit eingesetzt werden, da sich dadurch keine Vereinfachungen ergeben.)

- (d) Die Rotationsmatrix aus den Eigenwerten (s. Aufgabe 11) erzeugt eine neue Basis $\vec{z}$, in der die beiden Schwingungen entkoppeln. Wie hängt $\vec{z}$ mit $\vec{q}$ zusammen? Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen für $\vec{z}$ auf und lösen Sie diese.
- (e) Betrachten Sie jetzt den Spezialfall $m_1 = m_2 =: m$. Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen für $\vec{q}$, ausgedrückt durch κ und m .

Aufgabe 15: Eichtransformationen der Lagrange-Funktion

(2 Punkte)

Unter einer Eichtransformation eines Feldes F versteht man allgemein eine Abbildung $F \rightarrow F'$, welche seine Bewegungsgleichungen nicht ändert.

Die Lagrange-Funktion L eines Teilchens werde durch die folgende Eichtransformation modifiziert:

$$L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt}G(\vec{q}, t) .$$

Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für L' gleich zu denen von L sind, indem Sie sie explizit berechnen.

Aufgabe 16: Galilei-Gruppe

(5+1=6 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Galilei-Transformationen des Ortes $\vec{r}$ und der Zeit t mit einer (eigentlichen) Drehmatrix R , zwei Vektoren $\vec{c}$, $\vec{V}$ und einem Skalar a , alle zeitunabhängig:

$$\vec{r}' = R\vec{r} + \vec{c} + \vec{V}t , \quad t' = t + a .$$

- (a) Zeigen Sie, dass diese Transformationen bezüglich Hintereinanderausführung eine (nicht-abelsche) Gruppe bilden.

Bestimmen Sie dazu zunächst das Verknüpfungsgesetz, d.h. geben Sie $g_3 = (R_3, \vec{c}_3, \vec{V}_3, a_3)$ als Funktion der $g_{1,2}$ an, wenn erst eine Transformation mit Parametersatz g_1 , dann mit g_2 ausgeführt wird ($g_3 = g_2 \circ g_1$). Wieso ist diese Verknüpfung nicht-abelsch?

Welche Parameter hat das Einselement e ?

Welche Parameter gehören zu g^{-1} , dem inversen Element?

Wieso wird diese Verknüpfung das Assoziativgesetz erfüllen (ohne Rechnung)?

- (b) Zeigen Sie: Wenn sich ein freier Massenpunkt m in einem Koordinatensystem S geradlinig, gleichförmig bewegt, d.h. $\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$ gilt, dann bewegt er sich auch in einem Koordinatensystem S' , welches sich aus S durch eine Galilei-Transformation ergibt, geradlinig, gleichförmig, d.h. es gilt $\vec{r}' = \vec{v}_0' t' + \vec{r}_0'$. Wie drücken sich die gestrichenen Größen durch die ungestrichenen aus?

Also geht ein Inertialsystem unter allgemeinen Galilei-Transformationen in ein Inertialsystem über.