Klassische Theoretische Physik II

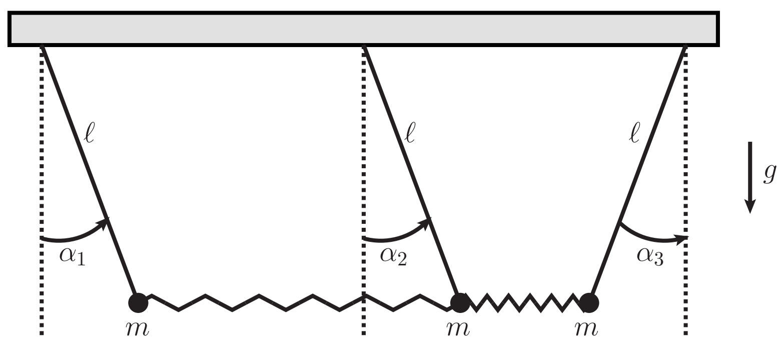
V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 8

Abgabe: Fr, 15.06.12
Besprechung: Di, 19.06.12

Aufgabe 20: Drei gekoppelte Pendel (*4+1+3+2+2+1=13 Punkte*)

Drei gleiche mathematische Pendel (Masse m, Länge l) sind durch zwei ideale, masselose Federn derselben Federkonstante κ verbunden und bewegen sich im homogenen Schwerefeld der Erde. Die Länge jeder der unbelasteten Federn ist jeweils gleich dem Abstand der Aufhängungspunkte der zwei durch sie verbundenen Pendel. Es wirken keine weiteren Kräfte.



(a) Formulieren Sie die Lagrangefunktion im Falle kleiner Auslenkungen. Zeigen Sie dabei, dass dann das durch die Feder verursachte Potential nur vom *horizontalen* Abstand zweier Pendel abhängt.

(b) Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab.

(c) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.
Ergebnis:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{\kappa}{m} \qquad \omega_3^2 = \frac{g}{l} + \frac{3\kappa}{m} \ .$$

(d) Berechnen Sie die zu den Eigenfrequenzen gehörenden Normalschwingungen (Eigenvektoren).

(e) Leiten Sie aus diesen Resultaten eine graphische Darstellung jeder der drei Normalschwingungen ab, zugeordnet zu ihrer jeweiligen Eigenfrequenz. Begründen Sie die Zuordnung physikalisch.

(f) Wie lautet folglich die allgemeine Lösung des physikalischen Problems für die Auslenkwinkel α_i, $i = 1 \dots 3$?

Aufgabe 21: Euler-Winkel (*2+2+3=7 Punkte*)

Eine allgemeine Drehung im dreidimensionalen Raum lässt sich über die sogenannten Euler-Winkel parametrisieren. Dabei wird aus dem kartesischen Rechtskoordinatensystem $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ ein neues kartesisches Rechtskoordinatensystem $\{\vec{e}_x{}''', \vec{e}_y{}''', \vec{e}_x{}'''\}$ mit Hilfe einer Drehmatrix D. Diese lässt sich zerlegen in die Hintereinanderausführung dreier Drehungen:

1. Winkel φ um die $\vec{e}_z$-Achse $\to \vec{e}_i{}'$
2. Winkel ϑ um die (neue) $\vec{e}_x{}'$-Achse $\to \vec{e}_i{}''$
3. Winkel ψ um die (neue) $\vec{e}_z{}''$-Achse $\to \vec{e}_i{}'''$

(In der Literatur finden sich neben dieser (z, x', z'')-Konvention auch andere mit (z, y', z'') oder (z, y', x'') sowie anderen Bezeichnungen der Winkel.)

(a) Schreiben Sie die Matrix $D(\varphi, \vartheta, \psi)$ als Matrixprodukt dreier Drehmatrizen, sodass gilt $\vec{e}_i{}''' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\vec{e}_j$. Wie erhält man die Komponenten $x_i{}'''$ eines Vektors $\vec{r}$ bezüglich des 3-gestrichenen Koordinatensystems aus denen des ungestrichenen (Rechnung ohne explizites Ausmultiplizieren von D).

(b) Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ lassen sich aus der Drehmatrix D mit Hilfe der Formel $\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}(\dot{D}D^T)_{lm}$ gewinnen. Zeigen Sie, dass bei einem Produkt von zwei Drehmatrizen $D = D_2 D_1$ für die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 + D_2\vec{\omega}_1$ gilt, wenn $\vec{\omega}_i$ zur Drehung D_i, $i = 1, 2$ gehört. Nutzen Sie dafür die Identität $\varepsilon_{klm} D_{lp} D_{mq} = \varepsilon_{jpq} D_{kj}$.

(c) Berechnen Sie damit $\vec{\omega}(\varphi, \vartheta, \psi)$ für die Drehung $D(\varphi, \vartheta, \psi)$ und verifizieren Sie das Ergebnis aus der Vorlesung. Wie sieht nach der Gleichung aus der vorherigen Teilausgabe $\vec{\omega}_\varphi$ aus? Folgern Sie daraus $\vec{\omega}_\vartheta$ und $\vec{\omega}_\psi$.