Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 9

Abgabe: Fr, 22.06.12
Besprechung: Di, 26.06.12

Aufgabe 22: Satz von Steiner (*3 Punkte*)

Ein starrer Körper der Gesamtmasse M (beliebige inhomogene Massenverteilung) mit Schwerpunkt im Koordinatenursprung hat das Trägheitsmoment Θ.
Zeigen Sie:
Bei Verschiebung des Koordinatensystems um einen Vektor $\vec{a}$ ist das Trägheitsmoment gegeben durch

$$\Theta_a = \Theta + M\left(\vec{a}^{\,2}\mathbb{1} - \vec{a}\vec{a}^{\,T}\right) \ .$$

Dieser Zusammenhang ist unter dem Namen *Satz von Steiner* bekannt, und dient dazu, Trägheitsmomente um Achsen auszurechnen, die nicht durch den Schwerpunkt des Körpers verlaufen.

Aufgabe 23: Trägheitsmomente (*4+3+4=11 Punkte*)

Ein homogener Kreiszylinder besitzt endliche Wandstärke mit Außenradius R_2, Innenradius $R_1 < R_2$ und Höhe H bei gegebener Masse M. Sein Schwerpunkt liegt im Koordinatenursprung, die Symmetrieachse ist die z-Achse.

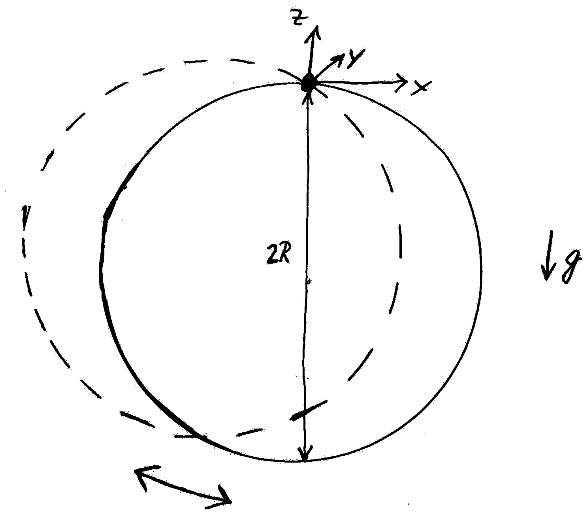
(a) Berechnen Sie die Trägheitsmomente bezüglich der Rotation um die Koordinatenachsen.

(b) Vergleichen Sie die Grenzfälle eines Hohlzylinders mit verschwindender Wandstärke, eines Vollzylinders und einer Stange infinitesimalen Querschnitts mit jeweils derselben Masse und Höhe. Interpretieren und diskutieren Sie das Ergebnis.

(c) Betrachten Sie nun den Grenzfall eines Hula-Hoop-Reifens (Hohlzylinder mit verschwindender Höhe). Berechnen Sie die Trägheitsmomente, wenn Sie den Reifen an einem festen Punkt seines Umfangs festhalten. Beschreiben Sie (kurz) das Aussehen der zugehörigen Drehungen.
Das Ergebnis von Aufgabe 22 könnte hilfreich sein.

Aufgabe 24: Hula-Hoop-Reifen (*3+3=6 Punkte*)

Ein Hula-Hoop-Reifen ist ein homogener Ring mit Radius R, Masse M und vernachlässigbarer Dicke (s. auch die vorherige Aufgabe; diese kann aber unabhängig davon gelöst werden). Er ist an einem festen Punkt seines Umfangs im homogenen Schwerefeld g der Erde im Koordinatenursprung aufgehängt, es wirken keine weiteren Kräfte. Die Schwingung findet in der x-z-Ebene statt, die der Reifenebene entspricht. Das Trägheitsmoment um diese Achse ist $\Theta_{yy} = 2MR^2$.



(a) Wie lautet die Lagrangefunktion des Problems?

(b) Lösen Sie das Problem in der Näherung kleiner Auslenkungen mit den Anfangsbedingungen $\varphi(t = 0) = 0$, $\dot{\varphi}(t = 0) = \dot{\varphi}_0$. Was ist die Schwingungsfrequenz um die Gleichgewichtslage?