Klassische Theoretische Physik II

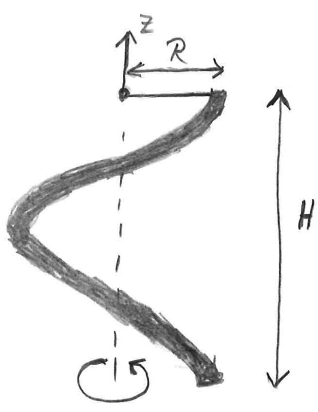
V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 10

Abgabe: Fr, 29.06.12
Besprechung: Di, 03.07.12

Aufgabe 25: Knethaken (*3+2+3+3+2=13 Punkte*)

Der Knethaken (Masse M) einer Küchenmaschine lässt sich näherungsweise als eine zylindrische Spirale mit n Windungen (n ganzzahlig), Höhe H und Radius R darstellen. Am oberen Ende in der Mitte der Spirale befindet sich der Aufhängepunkt im Koordinatenursprung. Der Haken dreht sich um die vertikale z-Achse und hat eine homogene Massenverteilung (konstante Masse pro Länge). Die Dicke der Spirale sowie die Verbindung zwischen Spirale und Aufhängepunkt vernachlässigen wir.



Links: Spirale für $n = 1$

(Teilaufgaben (a) und (d) teilweise Wiederholung älterer Themen! Das Ergebnis von (a) wird für den Rest der Aufgabe nicht benötigt.)

(a) Welche Liniendichte (Masse pro Länge) besitzt der Knethaken? Parametrisieren Sie dazu die Spirale in Zylinderkoordinaten und berechnen Sie zunächst ihre Länge.

(b) Begründen Sie, dass sich die Dichte $\varrho(\vec{r})$ des Hakens folgendermaßen parametrisieren lässt:
$$\varrho(\vec{r}) = \varrho_0 \cdot \delta(r - R) \cdot \delta(z - h(\varphi)) \cdot \Theta(\varphi) \cdot \Theta(2\pi n - \varphi) \ .$$
Dabei ist δ die δ-Distribution und Θ die Heaviside-Stufenfunktion mit $\Theta(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$. Wie sieht $h(\varphi)$ aus? Bestimmen Sie ϱ_0.

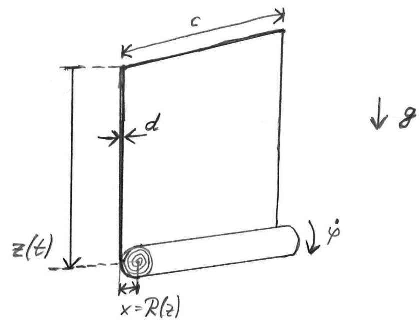
(c) Berechnen Sie den (vollständigen) Trägheitstensor des Knethakens bezüglich des Aufhängepunkts.
Teilergebnis: $\Theta_{zz} = MR^2$.

(d) Der Motor der Küchenmaschine dreht den Haken gleichmäßig mit Winkelgeschwindigkeit ω und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgeschalten. Durch den Teig wirkt eine linear geschwindigkeitsabhängige, bremsende Kraft $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$ auf den Haken. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für $t > 0$ auf. Integrieren Sie einmal, um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu erhalten. *Lösung:* $M\dot{\varphi} + \gamma\varphi = const.$.

(e) Lösen Sie diese, indem Sie zunächst eine Lösung der homogenen DGL finden, und dann die dort auftretende Konstante zeitabhängig wählen und so bestimmen, dass sie die inhomogene DGL löst. Um welchen Winkel dreht sich der Knethaken noch weiter?

Aufgabe 26: Abrollender Teppich (*3+2+2=7 Punkte*)

Ein Teppich der Länge l, der Breite c, der Dicke d ($d \ll l$) und der Dichte ϱ ist zur Zeit $t = 0$ komplett aufgerollt. Ein Ende des Teppichs wird (entlang der Breite) festgehalten und der Teppich rollt im Schwerefeld der Erde senkrecht nach unten ab. Die Rotationsbewegung der Rolle wird durch ein veränderliches Trägheitsmoment $\Theta(z)$ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ charakterisiert. (In der folgenden Rechnung ist es zweckmäßig, $u = 1 - \frac{z}{l}$ als dimensionslose neue Variable einzuführen.)



(a) Berechnen Sie den Radius $R(u)$ und das Trägheitsmoment $\Theta(u)$ der Rolle. Drücken Sie ihre Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ durch $\dot{u}$ aus. Wie lautet die kinetische Energie des Systems? Warum darf die Komponente in x-Richtung in erster Näherung vernachlässigt werden?

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(u, \dot{u}, t)$ auf.
Zwischenergebnis: $L(u, \dot{u}, t) = \frac{\varrho c d l^3}{2}\left(\frac{3}{2}u\dot{u}^2 + \frac{g}{l}(1-u^2)\right)$

(c) Zeigen Sie, dass Energieerhaltung gilt. Wie groß ist die Energie unter den Randbedingungen $z(t=0) = \dot{z}(t=0) = 0$? Leiten Sie aus der Energie eine Differentialgleichung für $\dot{u}$ her und berechnen Sie daraus, nach welcher Zeit T der Teppich vollständig abgerollt ist.
Nützliches Integral: $\int_0^1 \mathrm{d}u \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \sqrt{\sin\theta} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2 \simeq 1.1981402346\ldots$