Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 11

Abgabe: Fr, 06.07.12
Besprechung: Di, 10.07.12

Aufgabe 27: Tensoren (*1,5+1,5=3 Punkte*)

Ein Tensor n-ter Stufe ist ein Objekt $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ mit n Indizes, das sich unter Koordinatentransformationen komponentenweise wie die Ortskoordinaten transformiert:

$$T'_{i_1 \ldots i_n} = D_{i_1 j_1} D_{i_2 j_2} \ldots D_{i_n j_n} T_{j_1 \ldots j_n}$$

Zeigen Sie:

(a) $\sum_{k=1}^{3} T_{i_1 \ldots k \ldots k \ldots i_n}$ ist ein Tensor der Stufe $n-2$.

(b) Die Tensoreigenschaft des Trägheitstensors führt zur Invarianz der Rotationsenergie unter Drehungen des Koordinatensystems.

Aufgabe 28: Keltischer Wackelstein (*5+3+2+4+3=17 Punkte*)

Ein keltischer Wackelstein ist ein starrer Körper mit der Form eines halbierten Ellipsoids. Die längste Halbachse habe die Länge a, die beiden anderen, deutlich kürzeren Halbachsen die Längen b und c. In das Objekt werden zwei Metallzylinder etwas asymmetrisch von der langen Halbachse so eingesetzt, dass nur mehr die vertikale Hauptträgheitsachse mit der Symmetrieachse zusammenfällt, die anderen beiden jedoch um einen Winkel δ gegenüber den Objektachsen gedreht sind (s. Skizzen).
Dies führt dazu, dass sich der Wackelstein in eine Richtung, z.B. im Uhrzeigersinn, stabil dreht und durch die Reibung langsam abgebremst wird. In der anderen Richtung geht die Drehbewegung langsam in eine Kippbewegung über, bis irgendwann die gesamte kinetische Energie in dieser steckt, und dann weiter in eine Drehbewegung in die entgegengesetzte Richtung, also im Uhrzeigersinn.
Man kann auch direkt die Kippbewegung durch Antippen an einer Längsseite anstoßen; diese wird dann ebenfalls zu einer Drehbewegung in die Vorzugsrichtung.

Die Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar, evtl. unter Benutzung der angegebenen Zwischenergebnisse. Sinnvolle Abkürzungen können Schreibarbeit sparen.

Die Orientierung des Wackelsteins, dargestellt durch die Transformation vom körpereigenen in das raumfest Koordinatensystem, und damit auch die Bewegungen des Wackelsteins lassen sich durch drei Drehungen in folgender Reihenfolge beschreiben:

1. Drehung γ um die raumfeste Hochachse $\vec{e}_z$
2. Drehung α um die Längsachse $\vec{e}_1$ des Ellipsoids
3. Drehung β um die Querachse $\vec{e}_2$ des Ellipsoids.

(a) Zeigen Sie, dass sich der Auflagepunkt A im körperfesten Koordinatensystem (Ursprung im Mittelpunkt des gedachten vollständigen Ellipsoids) als Funktion der Winkel α und β schreiben lässt als

$$x_1 = -\frac{a^2}{p}\mu_1 \qquad x_2 = -\frac{b^2}{p}\mu_2 \qquad x_3 = -\frac{c^2}{p}\mu_3$$

mit $p^2 = (a\mu_1)^2 + (b\mu_2)^2 + (c\mu_3)^2$ und $\mu_i = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_z$.
Parametrisieren Sie zunächst den Auflagepunkt als beliebigen Punkt auf der Oberfläche. Welche Bedingung zeichnet ihn aus? Im letzten Schritt reicht es zu verifizieren, dass das entstehende Gleichungssystem durch die oben angegebenen Werte gelöst wird.
Zeigen Sie dann, dass die μ_i gegeben sind durch

$$\mu_1 = \cos\alpha\sin\beta \qquad \mu_2 = \sin\alpha \qquad \mu_3 = \cos\alpha\cos\beta\ ,$$

indem Sie $\vec{e}_z$ im körperfesten Koordinatensystem ausdrücken.

(b) Berechnen Sie im körperfesten Koordinatensystem die Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ und die Beschleunigung $\vec{a}_S$ des Schwerpunkts $\vec{r}_S = (0, 0, h)^T$ als Funktion der x_i sowie der Winkelgeschwindigkeitskomponenten ω_i.

(c) Wie erhalten Sie daraus die Zwangskraft $\vec{Z}_A$ auf den Wackelstein im Auflagepunkt A und das durch $\vec{Z}_A$ verursachte Drehmoment $\vec{M}_Z$ bezüglich des Schwerpunkts S (jeweils nur Ansatz, kein Einsetzen notwendig).

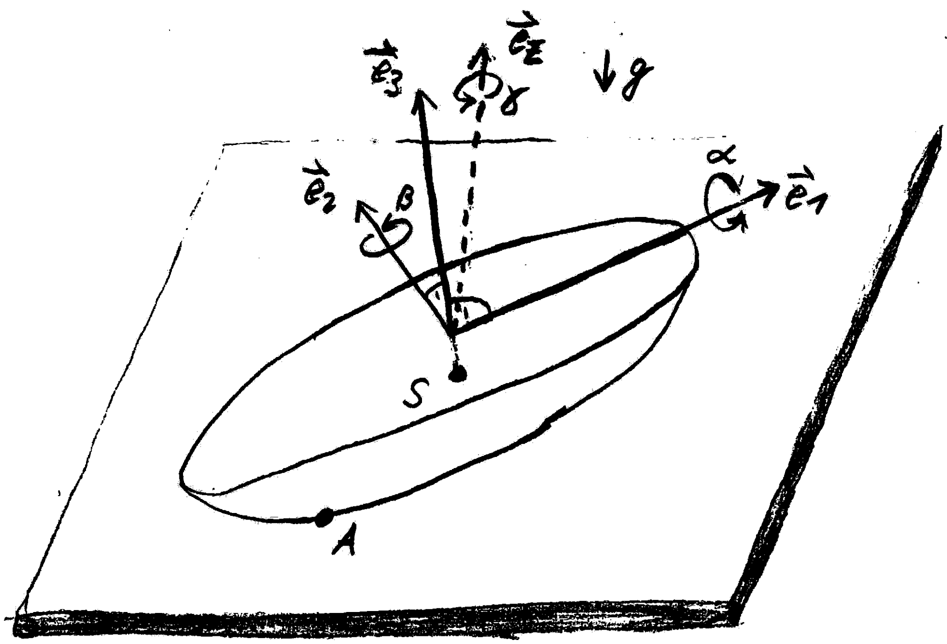
(d) Berechnen Sie den (nicht-diagonalen) Trägheitstensor Θ als Funktion der Hauptträgheitsmomente und des Winkels δ zwischen den horizontalen Hauptachsen des Ellipsoids und den horizontalen Hauptträgheitsachsen. Benutzen Sie den Drehimpulssatz

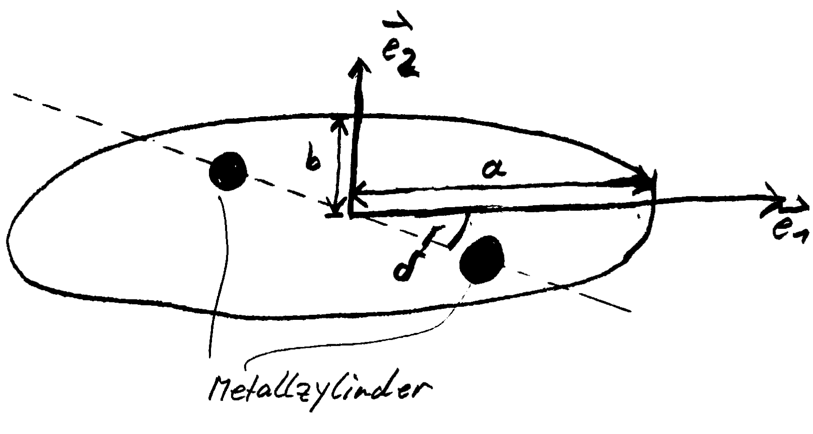
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Theta\,\vec{\omega})\right)_{\mathrm{IS}} = \vec{M}\ ,$$

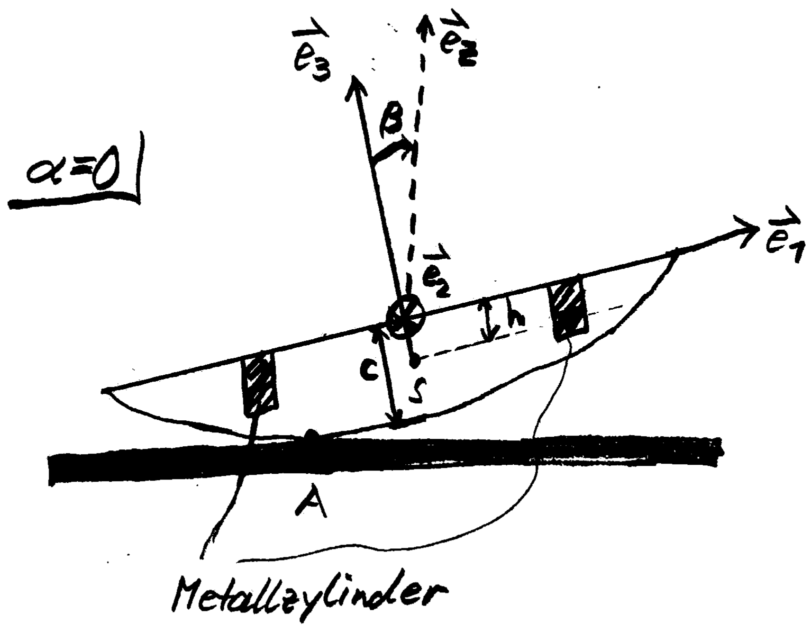
um daraus drei Differentialgleichungen für allgemeines $\vec{M}$ aufzustellen.

(e) Um die insgesamt 6 freien Variablen ω_i, α, β, γ zu bestimmen, werden drei weitere Differentialgleichungen benötigt.
Bestimmen Sie diese, indem Sie die körperfesten Komponenten ω_i der Winkelgeschwindigkeit als Funktion der drei Winkel α, β und γ ausdrücken.

Die in dieser Aufgabe berechneten Bewegungsgleichungen beschreiben die Bewegung des Wackelsteins, würden aber eine einmal angestoßene Bewegung unverändert lassen. Damit tatsächlich der beobachtete Effekt der Bewegungsrichtungsumkehr auftritt, muss noch Reibung berücksichtigt werden, welche in der Realität nie ganz zu vermeiden ist. Laminare Luftreibung bewirkt einen zusätzlichen Beitrag zum Drehmoment $\vec{M}_R = -c\vec{\omega}$, sodass sich das in (d) benutzte Drehmoment zusammensetzt aus $\vec{M} = \vec{M}_Z + \vec{M}_R$.







Organisatorisches

- *Studierende mit Studiengang Physik (inkl. Geophysik, Meteorologie) sowie Lehramt $\leq$ 3. Fachsemester mit Hauptfach Physik:*
  Anmeldung zur Vorleistung in QISPOS ist ab sofort möglich. Bitte möglichst bald eintragen (spätestens bis 23.07., 9 Uhr). Anmeldung zur Klausur in QISPOS sobald Vorleistung verbucht ist, bis spätestens 30.07., 9 Uhr.

- *Studierende mit Studiengängen, die nicht in QISPOS abgebildet sind, sondern die einen (benoteten) Schein benötigen, melden sich bitte ebenfalls bis zum 30.07. formlos per e-mail an* `michael.rauch@kit.edu` *mit Betreff "Anmeldung Klausur" sowie Name, Matrikelnummer und Studiengang an. Eine separate Anmeldung für die Vorleistung ist hier nicht notwendig.*

- *Blatt 12 wird eine Wiederholung des Vorlesungsstoffs sein. Umfang und Art der Aufgaben ist ähnlich zur Klausur. Wer möchte, kann also versuchen die Aufgaben als eine Art Probeklausur auf Zeit zu rechnen.*