Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

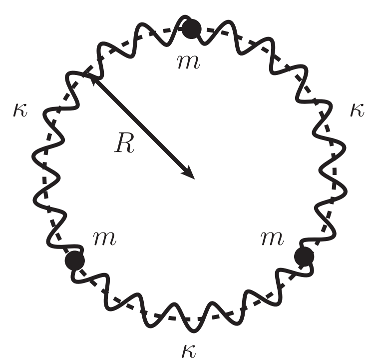
Übungsblatt 12

Abgabe: Fr, 13.07.12
Besprechung: Di, 17.07.12

Entsprechende Bearbeitungszeit als Klausur: ca. 90 Minuten

Aufgabe 29: Ring-Oszillator (*3+2+4+2=11 Punkte*)

Drei Massenpunkte m bewegen sich reibungsfrei auf einem Kreisring vom Radius R. Sie sind durch drei identische, ideale Federn mit Federkonstante κ entlang der Kreisbögen miteinander verbunden, die in Ruhelage entspannt sind. Es wirken keine weiteren Kräfte.



(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den Koordinaten φ_i $(i = 1, 2, 3)$ auf, die als Auslenkung aus einer durch gleiche Federspannung bestimmten Lage definiert sind. *[*$L = \frac{m}{2}R^2(\dot\varphi_1^2 + \dot\varphi_2^2 + \dot\varphi_3^2) - \kappa R^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_3 - \varphi_3\varphi_1)$*]*

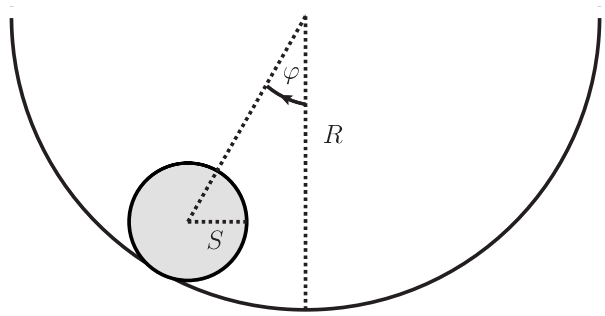
(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems die zur Transformation $\varphi_i^* = \varphi_i + \epsilon$, $t^* = t$ zugehörige Noetherladung. Finden Sie eine weitere Erhaltungsgröße.

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform auf. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen des Systems, indem Sie sie lösen.

(d) Wie lautet die allgemeine Lösung für die φ_i? Überlegen Sie sich zunächst, was Eigenfrequenz $\omega = 0$ für die Lösung bedeutet.
Falls Sie die vorherige Teilaufgabe nicht lösen konnten, verwenden Sie für die Eigenfrequenzen $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 4$, $\omega_3 = 6$ *und allgemeine Ausdrücke* $\vec{v}_i$ *für die zugehörigen Eigenvektoren.*

Aufgabe 30: Gestürzter Skater (*1+2+2=5 Punkte*)

Auf der Innenfläche eines fest eingemauerten Zylindermantels (Halfpipe) mit Radius R rollt ein Zylinder (Skater) mit Radius S und Masse m im homogenen Schwerefeld der Erde. Dieser hat eine radial nach außen abnehmende Dichte $\varrho(\vec{r}) = \varrho_0(S - r)$. Die beiden Zylinderachsen sind stets parallel, es wirken keine weiteren Kräfte.



(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des rollenden Zylinders um die Drehachse als Funktion von m und S.

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems auf. Betrachten Sie dazu den Abrollweg auf beiden Zylinderoberflächen, um eine Beziehung zwischen dem Auslenkwinkel des Skater φ und seinem Drehwinkel zu erhalten.

(c) Leiten Sie die Bewegungsgleichung ab.
Lösen Sie die Bewegungsgleichung im Grenzfall kleiner Ausschläge. Vergleichen Sie mit dem mathematischen Pendel (d.h. mit einem harmonischen Oszillator) gleicher Länge und Masse.

Aufgabe 31: Quickies (*4*1=4 Punkte*)

(a) Was sind verallgemeinerte Koordinaten?

(b) Finden Sie eine Bahngleichung für die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten (mit Rechnung!).

(c) Wie lässt sich die Transformation eines Koordinatensystems in ein anderes, beliebig dazu gedrehtes, beschreiben?

(d) Wie ist die Beziehung zwischen dem Trägheitstensor im Schwerpunkt eines starren Körpers mit beliebiger Massenverteilung und dem um einen um den Vektor $\vec{a}$ dazu verschobenen Punkt?