

7

TheoB Blatt 12

29) Ring-Oszillator

a) Massenpunkt auf Kreisbahn

$$x = R \cos \varphi ; \quad \dot{x} = -R \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$y = R \sin \varphi ; \quad \dot{y} = R \cos \varphi \dot{\varphi}$$

$$T_m = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\text{also } T = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2)$$

pot. Energie

In Ruhelage Feder entspannt

$$\Rightarrow U_{12} = \frac{k}{2} (\underbrace{R\varphi_2 - R\varphi_1}_{\substack{\text{zurückgelegter} \\ \text{Weg auf Kreisbahn}}} - \underbrace{L}_{\substack{\text{Federlänge}}} \big)^2$$

Absolutwinkel φ

Absolutwinkel in Ruhelage um $\frac{2\pi}{3}$ verschoben

$$\varphi_{2,1} = \varphi_1 + \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Federlänge } 3 \cdot L = \underbrace{2\pi R}_{\substack{\downarrow \text{Kreisumfang}}}$$

$$L = \frac{2\pi}{3} R$$

in Relativwinkel φ_2

$$\text{oderda } \varphi_1 = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_2 + \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{also } U_{12} = \frac{k}{2} R^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

$$\text{analog } U_{23}, U_{31}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L &= \frac{mR^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) - \frac{\kappa}{2} R^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + (\varphi_1 - \varphi_3)^2 \\ &= \frac{mR^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2) - \kappa R^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - \varphi_1 \varphi_2 - \varphi_2 \varphi_3 - \varphi_3 \varphi_1) \end{aligned}$$

b) Transformation

$$\begin{aligned} \varphi_i^* &= \varphi_i + \epsilon & \Rightarrow \dot{\varphi}_i^* &= \dot{\varphi}_i & \rightarrow \varphi_i = 1 \\ & & & & \text{pass Noethertheorem} \\ t^* &= t & \Rightarrow \frac{dt^*}{dt} &= 1, \quad \dot{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

Zeige zunächst, dass Noethertheorem anwendbar:

$$\text{Bed. } \frac{d}{d\epsilon} \left(L(\varphi_i^*, \dot{\varphi}_i^*, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right) \Big|_{\epsilon=0} = 0$$

Durch Einsetzen sieht man sofort $L^* = L$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\epsilon} \left(L^* \frac{dt^*}{dt} \right) \Big|_{\epsilon=0} = 0 \quad \Rightarrow \text{erfüllt} \\ (f=0)$$

Noetherladung:

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \varphi_i = mR^2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)$$

Drehimpuls erhaltung:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m \vec{r}_i \times \vec{\dot{r}}_i \\ &= \sum_i m \cdot R \cdot R \dot{\varphi}_i \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi \\ &= mR^2 \sum_i \dot{\varphi}_i \vec{e}_z \end{aligned}$$

weitere Erhaltungsgröße: Energie

$$\text{da } \frac{\partial}{\partial t} L = 0$$

c) Bew. gl.:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = m R^2 \ddot{\varphi}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -k R^2 (2\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -k R^2 (2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_3} = -k R^2 (2\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\ddot{\vec{\varphi}} = - \frac{k}{m} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \vec{\varphi} \stackrel{!}{=} -\omega^2 \vec{\varphi}$$

mit Ansatz f. $\vec{\varphi}$:

$$\vec{\varphi} = \vec{B} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{EW: } \det(A - \lambda \mathbb{1})$$

$$= (2-\lambda)^3 - 1 - 1 - (2-\lambda) \cdot 3$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 - 8 + 3\lambda = 0$$

$$-\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = 3$$

$\Rightarrow$ Eigenfrequenzen:

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_{2,3} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

4/ Eigenvektoren:

zu $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$2\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 = 0 \Rightarrow \varphi_3 = 2\varphi_1 - \varphi_2$$

$$-\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_3 = \varphi_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0 \quad (\text{alle 3 Gl.})$$

Versuche einen EV zu finden:

$$\varphi_3 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = -\varphi_2$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\vec{v}_3$ aus Orthogonalität:

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$2\varphi_1 + \varphi_3 = 0 \Rightarrow \varphi_3 = -2\varphi_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$$

($\vec{v}_2, \vec{v}_3$ nicht eindeutig bestimmt)

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ auch möglich + alles zyklisch vertauscht

5/

d) allg. Lösung:

 $\omega_1 = 0 \Rightarrow$ Schwingungsansatz funktioniert nichtBew. g.l. für $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ ($\Rightarrow U=0$):

$$m R^2 \ddot{\varphi}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = C_1 t + C_0$$

also zusammen

$$\vec{\varphi}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} \cdot (C_1 t + C_0)$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} \cdot B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02})$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \cdot B_3 \sin(\omega_3 t + \varphi_{03})$$

Normierung nicht wichtig, kann in

Redefinition der Konstanten absorbiert werden

9/31)

a) Koordinaten der Lagrangefunktion, die die Zwangsbedingungen automatisch erfüllen

b) Funktional $J[y] = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+y'(x)^2}$ minimal

$$F(x, y, y') = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\text{Euler-Lagrange-Gl: } \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow y' = \text{const.}$$

$$\Rightarrow y(x) = a \cdot x + b \quad \text{Gerade}$$

c) Euler-Winkel

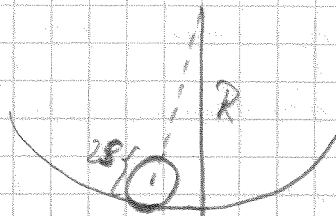
$$\vec{x}_i' = D_{ij} \vec{x}_j$$

$$\text{mit } D = D(\psi, \vartheta, \varphi) = D(\psi) D(\vartheta) D(\varphi)$$

um z-Achse um x-Achse um z-Achse
momentane

d) Satz von Steiner

$$\theta' = \theta + M(\vec{a}^2 \mathbb{1} - \vec{a} \vec{a}^T)$$



a) Trägheitstensor kleiner Zylinder

$$\Theta = \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^S r dr \rho_0 (S-r) r^2$$

$$= \rho_0 H \cdot 2\pi \cdot \int_0^S r^3 (S-r) dr$$

$$= 2\pi \rho_0 H \left[S \frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right]_0^S$$

$S^5 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)$

$$= 2\pi \rho_0 H S^5 \frac{1}{20}$$

Masse:

$$m = \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^S r dr \rho_0 (S-r)$$

$$= \rho_0 2\pi H \left[S \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^S$$

$$= 2\pi \rho_0 H \cdot S^3 \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \Theta = m S^2 \cdot \frac{3}{10}$$

8/b) Idee: abgerollte Länge auf Haltpipe-Oberfläche
und Zylinderoberfläche gleich groß:

$$R \cdot \varphi = S \cdot \varphi' \quad \text{mit } \varphi' = \varphi + \varphi \quad \begin{array}{l} \text{Abrollwinkel im} \\ \text{körperfesten System} \\ \text{Abrollwinkel im LS} \end{array}$$

$$\varphi' = \frac{R-S}{S} \varphi$$

$$\dot{\varphi}' = \frac{R-S}{S} \dot{\varphi}$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{\theta}{2} \dot{\varphi}'^2 = \frac{\theta}{2} \frac{(R-S)^2}{S^2} \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{20} m (R-S)^2 \dot{\varphi}^2$$

Schwerpunktsbew. Skater

$$T_{\text{sp}} = \frac{m}{2} (R-S)^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow T_{\text{ges.}} = \frac{m}{2} (R-S)^2 \frac{13}{10} \dot{\varphi}^2$$

Potential

$$U = mg \cdot \underbrace{(R-S)}_{\text{Höhe Schwerpunkt}} (1 - \cos \varphi)$$

$$\Rightarrow L = T - U = \frac{13}{20} m (R-S)^2 \dot{\varphi}^2 - mg (R-S) (1 - \cos \varphi)$$

c) Bwgl.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{13}{10} m (R-S)^2 \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg (R-S) \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{-10g \sin \varphi}{13 (R-S)} \sim \frac{-10g}{13 (R-S)} \cdot \varphi$$

kleine Winkel: $\sin \varphi \approx \varphi$

d) Ansatz: $\varphi(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \varphi(t) \Rightarrow \omega^2 = \frac{10g}{13 (R-S)}$$

$$\varphi(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{10g}{13(R-S)}} t + \varphi_0\right)$$

Vgl. math. Pendel $\omega^2 = \frac{g}{R-S} \Rightarrow \text{eff. Pendellänge} \overset{\text{Faktor}}{\sim} \frac{13}{10} \text{ größer}$