

✓ Aufgabe 28) Keltischer Wackelstein

(Gegenüber der Angabe sind ein paar Details verändert, um eine konsistentere Darstellung zu haben.)

a) Der Auflagepunkt A lässt sich im körperfesten Koordinatensystem schreiben als

$$\vec{r}_A = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3$$

Auf der Oberfläche des Ellipsoids gilt

$$f(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

Im Punkt A steht der Normalenvektor des Ellipsoids senkrecht:

$$\vec{\nabla} f(x_1, x_2, x_3) = \lambda \cdot \vec{e}_2 \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebige Konstante}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{2x_1}{a^2} \vec{e}_1 + \frac{2x_2}{b^2} \vec{e}_2 + \frac{2x_3}{c^2} \vec{e}_3 = \lambda \vec{e}_2$$

Diese Gl. mit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ und $\vec{e}_2$ multipliziert liefert

$$\text{I) } \frac{2x_1}{a^2} = \lambda \mu_1$$

$$\text{II) } \frac{2x_2}{b^2} = \lambda \mu_2$$

$$\text{III) } \frac{2x_3}{c^2} = \lambda \mu_3$$

$$\text{IV) } \frac{2x_1}{a^2} \mu_1 + \frac{2x_2}{b^2} \mu_2 + \frac{2x_3}{c^2} \mu_3 = \lambda$$

2/

IV) in I), II), III) eingesetzt eliminiert λ

$$\Rightarrow \text{I)} \quad \frac{x_1}{a^2} (1 - \mu_1^2) - \frac{x_2}{b^2} \mu_2 \mu_1 - \frac{x_3}{c^2} \mu_3 \mu_1 = 0$$

$$\text{II)} \quad \frac{x_2}{b^2} (1 - \mu_2^2) - \frac{x_1}{a^2} \mu_1 \mu_2 - \frac{x_3}{c^2} \mu_3 \mu_2 = 0$$

$$\text{III)} \quad \frac{x_3}{c^2} (1 - \mu_3^2) - \frac{x_1}{a^2} \mu_1 \mu_3 - \frac{x_2}{b^2} \mu_2 \mu_3 = 0$$

oder in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 1 - \mu_1^2 & -\mu_1 \mu_2 & -\mu_1 \mu_3 \\ -\mu_1 \mu_2 & 1 - \mu_2^2 & -\mu_2 \mu_3 \\ -\mu_1 \mu_3 & -\mu_2 \mu_3 & 1 - \mu_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1/a^2 \\ x_2/b^2 \\ x_3/c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung dieses GL. systems führt auf

$$x_1 = -\frac{\mu_1}{p} a^2$$

$$x_2 = -\frac{\mu_2}{p} b^2$$

$$x_3 = -\frac{\mu_3}{p} c^2$$

(Die sich ebenfalls ergebende positive Lösung würde dem gespiegelten Punkt auf der Oberseite entsprechen.)

Kontrolle durch Einsetzen liefert

$$\text{I)} \quad -\frac{\mu_1}{p} (1 - \mu_1^2) + \frac{\mu_2}{p} \mu_1 \mu_2 + \frac{\mu_3}{p} \mu_1 \mu_3 = 0$$

$$-\frac{\mu_1}{p} (1 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2) = 0$$

erfüllt wg. Normierung (Def. der μ_i als Projektion)

II), III) Rechnung analog

3/

Bestimmung der μ_i , indem $\vec{e}_2$ ins körper feste Koordinatensystem rotiert wird.

Reihenfolge der Drehungen (vom raumfesten ins körper feste):

- 1) Drehung γ um die raumfeste Hochachse $\vec{e}_2$
- 2) Drehung α um die momentane Längsachse $\vec{e}_x'$
- 3) Drehung β um die Querachse $\vec{e}_2$ des Ellipsoids

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 \end{pmatrix} = D_\beta D_\alpha D_\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\sin \beta \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

b) * Auflagepunkt rutscht nicht, Auflagepunkt ist Drehpunkt.

allgemein: $\left(\frac{d}{dt} - \right)_{IS} = \left(\frac{d}{dt} - \right)_{KS} + \vec{\omega} \times -$

Betrachte Schwerpunktsvektor $\vec{r}_S \stackrel{KS}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix}$

$$\left(\vec{v}_S\right)_{IS} = \underbrace{\left(\vec{v}_S\right)_{KS}}_{=0} + \vec{\omega} \times \left(\vec{r}_S - \vec{r}_A\right)$$

$\uparrow$ Drehpunkt

$$\left(\vec{v}_S\right)_{IS} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_S - \vec{r}_A)$$

$$\uparrow \quad = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -(x_3+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_3 x_2 - \omega_2 (x_3+h) \\ \omega_1 (x_3+h) - \omega_3 x_1 \\ \omega_2 x_1 - \omega_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_S$ im Inertialsystem, ausgedrückt durch körper feste Koordinaten $\vec{e}_i$.

4/

$$\begin{aligned}\vec{a}_S &= \left(\frac{d\vec{v}_S}{dt} \right)_{IS} = \left(\frac{d\vec{v}_S}{dt} \right)_{KS} + \vec{\omega} \times \vec{v}_S \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\omega}_3 x_2 - \dot{\omega}_2 (x_3 + h) + \omega_3 \dot{x}_2 - \omega_2 \dot{x}_3 \\ \dot{\omega}_1 (x_3 + h) - \dot{\omega}_3 x_1 + \omega_1 \dot{x}_3 - \omega_3 \dot{x}_1 \\ \dot{\omega}_2 x_1 - \dot{\omega}_1 x_2 + \omega_2 \dot{x}_1 - \omega_1 \dot{x}_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r}_S - \vec{r}_A))\end{aligned}$$

- c) Kraft auf Ellipsoid: Zwangskraft $\vec{Z}_A$ durch Tisch
Bestimmung von $\vec{Z}_A$:

Betrachte Kräfte im Schwerpunkt:

$$m \vec{a}_S = \underbrace{m \cdot g \cdot (-\vec{e}_z)}_{\text{Gewichtskraft}} + \vec{Z}_A$$

Daraus Drehmoment ($\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$)

$$\text{also hier: } \vec{M} = (\vec{r}_A - \vec{r}_S) \times \vec{Z}_A$$

↑ Kraft greift im Auflagepunkt an.

- d) Trägheitstensor im Hauptträgheitsachsen-KS

$$\Theta_H = \begin{pmatrix} \Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{pmatrix} \quad \text{diagonal}$$

in Ellipsoid-KS durch Drehung um Winkel $-\delta$

Trägheitstensor ist Tensor 2. Stufe

$$\text{also } \Theta_{ij} = D_{ik} D_{jl} (\Theta_H)_{kl}$$

$$\text{mit } D = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5/ also $\Theta = D \Theta_H D^T$

$$= \begin{pmatrix} \Theta_x \cos^2 \delta + \Theta_y \sin^2 \delta & (\Theta_x - \Theta_y) \sin \delta \cos \delta & 0 \\ (\Theta_{xx} - \Theta_{yy}) \sin \delta \cos \delta & \Theta_x \sin^2 \delta + \Theta_y \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{pmatrix}$$

$$=: \begin{pmatrix} A & D & 0 \\ D & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Drehimpulssatz $\vec{M} = \left(\frac{d}{dt} \Theta \vec{\omega} \right)_{IS} = \left(\frac{d}{dt} \Theta \vec{\omega} \right)_{KS} + \vec{\omega} \times \Theta \vec{\omega}$

$$= \Theta \left(\frac{d}{dt} \vec{\omega} \right)_{KS} + \vec{\omega} \times \Theta \vec{\omega}$$

↑
 Θ im KS nicht zeitabhängig

$$\Rightarrow M_1 = A \dot{\omega}_1 + D \dot{\omega}_2 + \omega_2 C \omega_3 - \omega_3 (D \omega_1 + B \omega_2)$$

$$M_2 = D \dot{\omega}_1 + B \dot{\omega}_2 + \omega_3 (A \omega_1 + D \omega_2) - \omega_1 C \omega_3$$

$$M_3 = C \dot{\omega}_3 + \omega_1 (D \omega_1 + B \omega_2) - \omega_2 (A \omega_1 + D \omega_2)$$

e) Rechnung analog zu den Eulerwinkeln

$$\vec{\omega} = D_\beta D_\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} + D_\beta \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\gamma} \sin \beta \cos \alpha + \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\gamma} \sin \alpha + \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \cos \beta \cos \alpha + \dot{\alpha} \sin \beta \end{pmatrix}$$