Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)

Abgabe: Montag, 22.04.2013, 11:30 Uhr
Besprechung: Dienstag, 23.04.2013

Allgemeine Informationen

- Informationen zur Vorlesung: http://www.ttp.kit.edu/˜marquard
- Probeklausur: 04.06.2013, 5. und 6. Block
- Modulprüfung: 24.07.2013, 17 – 20 Uhr
- Abgabe der Übungsaufgaben, montags bis 11:30 Uhr

Aufgabe 1: Differentialgleichungs-1x1 I — 10 Punkte

Betrachten Sie die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = \alpha(x)y(x)\,. \tag{1}$$

Sei $F(x)$ ein beliebige Stammfunktion von $\alpha(x)$, d.h. es gelte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = \alpha(x)\,. \tag{2}$$

- Zeigen Sie, dass

$$y(x) = C\exp(F(x)) \tag{3}$$

  eine Lösung der Differentialgleichung in Gl. (1) ist. Die Konstante C lässt sich ggf. aus der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ bestimmen.

- Lösen Sie folgende Differentialgleichungen unter Beachtung der gegebenen Anfangsbedingung:

  a) $xy'(x) + y(x) = 0$, $y(1) = 2$,

  b) $y'(x) + \cos(x)y(x) = 0$, $y(0) = 1$,

  c) $xy'(x) + (1 - x^2)y(x) = 0$, $y(1) = 1$.

Aufgabe 2: Differentialgleichungs-1x1 II — 10 Punkte

Betrachten Sie die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = \alpha(x)y(x) + s(x)\,. \tag{1}$$

Die allgemeinste Lösung lässt sich in der Form

$$y(x) = Cy_h(x) + y_p(x) \tag{2}$$

schreiben, wobei y_h eine Lösung der homogenen Differentialgleichung und y_p eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist. Um eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, bietet sich die Methode der *Variation der Konstanten* an. Man löse hierzu zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung, ersetze die Konstante C durch eine Funktion $C(x)$ und setze dieses Ergebnis in die inhomogene Gleichung ein.

(bitte wenden)

- Zeigen Sie, dass dann für $C(x)$ die Gleichung ($F(x)$ wie in Aufgabe 1)

$$C'(x) = s(x)\exp(-F(x)) \tag{3}$$

folgt, aus der sich $C(x)$ bestimmen lässt. Man erhält auf diese Weise eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in der Form

$$y_p(x) = C(x)\exp(F(x))\,. \tag{4}$$

- Lösen Sie mit dieser Methode die folgenden Differentialgleichungen:

  a) $xy'(x) = 4y + x^5, \quad x > 0,$

  b) $xy'(x) = -y + e^x, \quad x > 0.$

Aufgabe 3: Differentialgleichungs-1x1 III	10 Bonuspunkte

Betrachten Sie die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0\,. \tag{1}$$

Eine Differentialgleichung dieser Form lässt sich leicht dem *Eulerschen Ansatz* der Form

$$y(x) = e^{\lambda x} \tag{2}$$

lösen. Der Ansatz führt auf eine Gleichung für λ der Form

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0\,. \tag{3}$$

Besitz Gl. (3) zwei einfache Nullstellen $\lambda_{1,2}$, so ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) durch

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{4}$$

gegeben. Im Falle einer doppelten doppelten Nullstelle $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ist die Lösung durch

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \tag{5}$$

gegeben. Die Konstanten C_1 und C_2 müssen ggf. an die Anfangsbedingungen angepasst werden.

- Überzeugen Sie sich, dass diese Behauptungen korrekt sind.

- Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen unter Beachtung der Anfangsbedingungen:

  a) $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1,$

  b) $y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$