Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)

Abgabe: Montag, 29.04.2013, 11:30 Uhr
Besprechung: Dienstag, 30.04.2013

Aufgabe 1: Euler-(Lagrange-)Gleichung — 6 Punkte

Seien $C^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die n-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf den reellen Zahlen. Ein Funktional F ist ein Abbildung $F : C^n \to \mathbb{R}$, die eine Funktion auf die reellen Zahlen abbildet. Die Extremierung solcher Funktionale spielt in der theoretischen Physik eine zentrale Rolle, Beispiele hierfür sind Aufgabe 2 und 3.
Betrachten Sie nun ein Funktional der Form

$$F[f] = \int_{x_1}^{x_2} g\big(f(x), f'(x)\big)\mathrm{d}x \tag{1}$$

mit $g \in C^2$. Eine Funktion $y(x)$ mit $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ minimiert oder maximiert das Funktional, falls für jede beliebige Funktion $\eta(x)$ mit $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

$$\delta F[y] = F[y + \epsilon\eta] - F[y] = \mathcal{O}(\epsilon^2), \qquad \epsilon \in \mathbb{R} \tag{2}$$

gilt.
Entwickeln Sie Gl. (2) in ϵ und finden Sie eine Bedingung, sodass der Term linear in ϵ verschwindet. Zeigen Sie, dass hieraus die *Euler-(Lagrange)-Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial y(x)} g\big(y(x), y'(x)\big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'(x)} g\big(y(x), y'(x)\big) = 0 \tag{3}$$

folgt.

Aufgabe 2: Brachystochronenproblem — 7 Punkte

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für das Brachystochronenproblem das Integral

$$\int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{-2gy}} dx, \quad y = y(x) \quad (g = \text{Erdbeschleunigung}) \tag{1}$$

zu minimieren ist.

a) Zeigen Sie, dass unter Verwendung der Euler'schen Gleichung die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}(y(1 + y'^2)) = 0 \tag{2}$$

folgt.

b) Zeigen Sie, dass die Parametrisierung der Kurve (mit ψ als Bahnparameter)

$$x = R(\psi + \sin\psi), \quad y = R(1 + \cos\psi) \tag{3}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (2) ist. Drücken Sie hierzu $y' = dy/dx$ durch $dy/d\psi$ und $dx/d\psi$ aus.

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik) — Abgabe: Montag, 29.04.2013, 11:30 Uhr
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik) — Besprechung: Dienstag, 30.04.2013

Aufgabe 3: Fermat'sches Prinzip — 7 Punkte

Gegeben sei ein optisches Medium in zwei Dimensionen mit einem Brechungsindex $n(x,y) = a/y$, $a \in \mathbb{R}$. Die Lichtgeschwindigkeit in diesem Medium ist somit $v(x,y) = c_0/n(x,y)$.

a) Zeigen Sie, dass die Laufzeit eines Lichtstrahls zwischen zwei Punkten A und B gegeben ist durch

$$T = \frac{1}{c_0} \int_A^B n(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad y = y(x)\,. \tag{1}$$

Nach dem Fermat'schen Prinzip breiten sich Lichtstrahlen in einem Medium entlang einer Bahn aus, die die Laufzeit minimiert.

b) Stellen Sie mit Hilfe der Euler'schen Gleichung eine Differentialgleichung für die Bahnkurve $y(x)$ auf und lösen Sie diese.

c) Zeigen Sie, dass sich die Lichtstrahlen entlang von Kreislinien ausbreiten.

Aufgabe 4: Differentialgleichungs-1x1 IV — 10 Bonuspunkte

Eine Differentialgleichung

$$P(x,y) + Q(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{1}$$

lässt sich formal in der Form

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

schreiben. Wir bezeichnen eine Differentialgleichung dieser Form als *exakt*, falls eine Funktion $F(x,y)$ – in diesem Zusammenhang auch *Stammfunktion* genannt – existiert, so dass

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = P(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = Q(x,y) \tag{3}$$

gilt. In diesem Fall erhält man alle Lösungen der Differentialgleichung, indem man die Gleichung

$$F(x,y) = F(x,y(x)) = C = F(x_0,y_0), \quad C \in \mathbb{R}$$

nach $y(x)$ auflöst. Eine Stammfunktion existiert, falls

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)\,. \tag{4}$$

Die Stammfunktion lässt sich nun wie folgt finden: Aufgrund von Teil 1 von Gl. (3), ist sie von der Form

$$F(x,y) = \int P(x,y)\mathrm{d}x + \varphi(y)\,. \tag{5}$$

Setzt man dies in Teil 2 von Gl. (3) ein, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\mathrm{d}x\,, \tag{6}$$

woraus sich durch Integration $\varphi(y)$ bestimmen lässt. Beachten Sie, dass man in der hier dargelegten Vorgehensweise auch die Rolle von x und y vertauschen kann.
Vergewissern Sie sich, dass die folgenden Differentialgleichungen exakt sind und lösen Sie sie für die gegebenen Anfangsbedingungen. Hinweis: Sie können alternativ auch $x(y)$ berechnen.

a) $(12xy + 3)\mathrm{d}x + 6x^2\mathrm{d}y = 0,\ y(1) = 0,$

b) $(2xe^y - 1)\mathrm{d}x + (x^2e^y + 1)\mathrm{d}y = 0,\ y(1) = 0.$

Ist eine Differentialgleichung nicht exakt, so lässt sie sich doch häufig dirch Multiplikation mit einem *integrierenden Faktor* $M(x, y)$ in eine solche überführen. Unter Ausnutzung der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial y}(M(x,y)P(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(M(x,y)Q(x,y))\,. \tag{7}$$

folgt eine partielle Differentialgleichung für $M(x, y)$. Beachten Sie, dass der integrierende Faktor auch nur von x oder y abhängen kann. In Spezialfällen lässt sich der integrierende Faktor direkt angeben.

- Zeigen Sie, dass gilt: Falls

  $$f = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial}{\partial y}P - \frac{\partial}{\partial x}Q\right) \tag{8}$$

  nur von x abhängt, ist

  $$M(x) = \exp\int f(x)\mathrm{d}x \tag{9}$$

  ein integrierender Faktor.
  Weiterhin gilt: Falls

  $$g = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial}{\partial y}P - \frac{\partial}{\partial x}Q\right) \tag{10}$$

  nur von y abhängt, ist

  $$M(y) = \exp(-\int g(y)\mathrm{d}y) \tag{11}$$

  ein integrierender Faktor.

- Finden Sie für die folgenden Differentialgleichungen einen integrierenden Faktor und bestimmen Sie eine explizite oder implizite Lösung:

  a) $-2xy\mathrm{d}x + (3x^2 - y^2)\mathrm{d}y = 0,$

  b) $(\sin x - x\cos x - 3x^2(y - x)^2)\mathrm{d}x + 3x^2(y - x)^2\mathrm{d}y = 0.$