

Aufgabe 1: Gangunterschied eines Pendels I

6 Punkte

Betrachten sie ein mathematisches Pendel der Länge l und mit Masse m im Gravitationsfeld der Erde g . Ziel dieses Aufgabenblattes ist es die Frequenzänderung des Pendels relativ zu einem harmonischen Oszillators der Frequenz $\sqrt{g/l}$ als Potenzreihe in der Auslenkungen θ_0 zu berechnen.

- Stellen sie die Lagrangefunktion des Pendels auf. Wie lauten die exakten Euler-Lagrange-Gleichungen? Entwickeln sie diese bis zur Ordnung θ^3 .
- In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für Bewegungsgleichungen der Form

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3, \quad \omega_0^2 x \gg |\alpha x^2| \gg \beta x^3$$

die Frequenzänderung proportional zur Amplitude a^2 ist, d.h.

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} \right) a^2.$$

Benutzen sie diese Formeln um die Frequenzänderung des Pendels zu bestimmen. Berechnen sie ausserdem die Korrekturterme für die Lösung der Bewegungsgleichung bis zur Ordnung $x^{(2)}$.

Aufgabe 2: Gangunterschied eines Pendels II

10 Punkte

Das Resultat für $\omega^{(2)}$ kann auch durch explizite Rechnung hergeleitet werden. Jedes 1-dimensionale Problem mit Energieerhaltung ist integrabel.

- Benutzen sie die Methode der Variablentrennung um die Schwingungsdauer in Integralform anzugeben.
Hinweis: Betrachten sie die maximale Auslenkung θ_0 als gegeben und drücken sie die Energie durch θ_0 aus.
- Dieses elliptische Integral könnte man numerisch lösen. Um das Resultat aus Aufgabe 1 herzuleiten, soll das Integral bis zur Ordnung θ_0^4 entwickelt und explizit berechnet werden.

Aufgabe 3: Gangunterschied eines Pendels III

4 Punkte

Betrachten sie zwei Pendeluhren mit der gleichen Länge $l = 1$ m und verschiedener Auslenkung 2 cm bzw. 10 cm.

- Um wieviele Pendelzyklen δn unterscheiden sich die beiden Uhren nach einem Tag?
- Welchem Zeitintervall entspricht dieses δn ?