Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik, TTP)
Dr. M. Brucherseifer (TTP)

Abgabe: Montag, 01.07.2013, 11:30 Uhr
Besprechung: Dienstag, 02.07.2013

Aufgabe 1: Poisson-Klammern — 10 Punkte

Die Poisson-Klammer zweier Funktionen $f(\underline{p},\underline{q},t), g(\underline{p},\underline{q},t)$ ($\underline{q} = q_1,\ldots,q_n$; $\underline{p} = p_1,\ldots,p_n$,), die von den verallgemeinerten Koordinaten q_i und Impulsen $p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L$ abhängen, ist gegeben durch

$$\{f,g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\,.$$

a) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Poisson-Klammer. Hierbei seien f, f_1, f_2, f_3, g Funktionen von den verallgemeinerten Koordinaten q_i und den Impulsen p_i.

(i)

$$\begin{aligned}\{f_1+f_2,g\} &= \{f_1,g\}+\{f_2,g\}\,,\\ \{f_1 f_2,g\} &= f_1\{f_2,g\}+\{f_1,g\}f_2\,,\\ \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} &= \{\frac{\partial f}{\partial t},g\}+\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\}\end{aligned}$$

(ii)

$$\{f,q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}\,,\quad \{f,p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}\,,$$

womit dann

$$\{q_i,q_k\} = 0 \quad \{p_i,p_k\} = 0 \quad \{p_i,q_k\} = \delta_{ik}$$

gilt.

(iii) Jacobi-Identität:

$$\{f_1,\{f_2,f_3\}\}+\{f_2,\{f_3,f_1\}\}+\{f_3,\{f_1,f_2\}\} = 0$$

b) Betrachten Sie im folgenden den dreidimensionalen Fall in kartesischen Koordinaten, der Drehimpuls sei definiert durch

$$\vec{L} = \vec{q}\times\vec{p}\,.$$

Berechnen Sie

(i) $\{L_i,p_j\}$

(ii) $\{L_i,L_j\}$

(iii) Sei φ eine skalare Funktion von $\vec{q}$ und $\vec{p}$, d.h φ hängt nur von den Kombinationen $\vec{q}^2,\vec{p}^2,\vec{q}\cdot\vec{p}$ ab: $\varphi = \varphi(\vec{q}^2,\vec{p}^2,\vec{q}\cdot\vec{p})$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\{\varphi,L_z\} = 0\,.$$

Aufgabe 2: Erhaltungsgrössen — 5 Punkte

a) Zeigen sie, dass die Poisson-Klammer zweier Erhaltungsgrössen f und g wieder eine Erhaltungsgrösse ist, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f,g\} = 0\,.$$

Hinweis: Benutzen sie die in Aufgabe 1 hergeleiteten Identitäten für die Poisson-Klammer.

b) Sei $I(q,p,t)$ eine Erhaltungsgrösse eines Hamiltonschen Systems, welches nicht explizit von der Zeit abhängt. Zeigen sie das $\partial I/\partial t^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Erhaltungsgrösse ist.

c) Um dies zu veranschaulichen, betrachten sie ein freies Teilchen mit Masse m, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt, d.h. $H = p^2/(2m)$. Zeigen sie, dass $F = q - pt/m$ eine Erhaltungsgrösse ist.

Aufgabe 3: Teilchen im Magnetfeld — 5 Punkte

Die Bewegung eines elektrisch geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld wird durch die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q(\phi(\vec{r}) - \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r}))$$

beschrieben, wobei m die Masse und q die elektrische Ladung des Teilchens sind. ϕ ist das skalare und $\vec{A}$ das Vektorpotential.

a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion auf.

b) Betrachten Sie nun den Fall $\phi = 0$ und $\vec{A}(\vec{x}) = (0, xB, 0)$. Dies führt über $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ auf ein konstantes Magnetfeld in z-Richtung. Stellen Sie für diesen Fall die kanonischen Gleichungen auf und lösen Sie sie.