Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik, TTP)
Dr. M. Brucherseifer (TTP)

Abgabe: Montag, 08.07.2013, 11:30 Uhr
Besprechung: Dienstag, 09.07.2013

Aufgabe 1: Kanonische Transformationen — 8 Punkte

a) Betrachten sie ein Hamiltonsystem mit den Koordinaten q_i, p_i, $i = 1, ..., n$. Vergewissern sie sich, dass die Hamiltongleichungen geschrieben werden können als

$$\dot{x}_i = \epsilon_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (\text{Summenkonvention: Summiere wiederholte Indizes}), \tag{1}$$

wobei $\vec{x} = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ ein $2n$ Vektor und

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

eine $2n \times 2n$ Matrix darstellt.

b) Betrachten sie nun Koordinatentransformationen

$$q_i \to Q_i \equiv Q_i(\vec{q}, \vec{p}) \quad \text{und} \quad p_i \to P_i \equiv P_i(\vec{q}, \vec{p}) \tag{3}$$

also $x_i \to y_i(\vec{x}) = (Q_1, ..., Q_n, P_1, ..., P_n)$. Zeigen sie, dass die transformierten Koordinaten genau dann die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen erfüllen, falls

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \epsilon_{jk} \frac{\partial y_l}{\partial x_k} = \epsilon_{il}. \tag{4}$$

Die Koordinatentransformationen welche Gl.(4) erfüllen heissen *kanonische Transformationen*.

c) Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammer invariant unter kanonischen Transformationen ist.
Hinweis: Zeigen sie zuerst

$$\{f, g\} = -\frac{\partial f}{\partial x_i} \epsilon_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

d) Zeigen sie, dass jede Transformation, welche die Poisson-Klammer invariant lässt eine kanonische Transformation ist. Also

$$\{Q_i, Q_k\} = \{P_i, P_k\} = 0\,, \quad \{P_i, Q_k\} = \delta_{ik}.$$

Aufgabe 2: Der harmonische Oszillator kanonisch transformiert — 6 Punkte

Ein Teilchen der Masse $m = 1$ bewege sich in einer Dimension unter Einfluss des Potentials $V = q^2/2$.

a) Wie lautet die Lagrangefunktion? Leiten sie daraus die Hamiltonfunktion her.

b) Sei p der konjugierte Impuls von q. Zeigen sie, dass

$$q = \sqrt{2P}\sin Q\,, \quad p = \sqrt{2P}\cos Q$$

eine kanonische Transformation definiert.

c) Stellen sie die Hamiltonfunktion in Q und P auf. Wie lauten die Bewegungsgleichungen? Finden sie eine Lösung der Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 3: Phasenraum des gedämpften harmonischen Oszillator — 6 Punkte

Betrachten sie einen harmonischen Oszillator mit Dämpfung. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

a) Skizzieren sie zwei Bahnen im durch p und q aufgespannten Phasenraum, wobei $p \equiv m\dot{q}$. Benutzen sie die Anfangsbedingungen

$$(q,p)_1 = (q_0, 0)\,, \quad (q,p)_2 = (0.9q_0, 0)$$

und $\gamma < \omega_0$.

b) Betrachten Sie nun einen bei $t_0 = 0$ definierten Bereich des Phasenraums der Form $q_1 < q < q_2$ und $p_1 < p < p_2$ (q_1, q_2, p_1 und p_2 sind hier verschieden zu den Anfangsbedingungen in der Teilaufgabe a). Berechnen Sie wie sich das zugehörige Phasenraumvolumen mit der Zeit ändert.