Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik, TTP)
Dr. M. Brucherseifer (TTP)

Abgabe: Montag, 15.07.2013, 11:30 Uhr
Besprechung: Dienstag, 16.07.2013

Wichtig: Die Modulprüfung findet am 24.07.2013 von 17 bis 20 Uhr im Gerthsen Hörsaal und im Audimax statt. Zugelassenes Hilfsmittel ist ein doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt. Melden sie sich bis am 21.07.2013 im Studierendenportal für die Prüfung an. Die Anmeldung ist erst nach erbrachter Vorleistungen möglich. Die Vorleistung von diesem Semester wird voraussichtlich am 17.07.2013 online eingetragen sein. Falls sie die Vorleistung erbracht haben, aber sich aus technischen Gründen nicht im Studierendenportal anmelden können, schreiben sie eine Email an mathias.brucherseifer@kit.edu. Die Sitzpläne werden im EG des Physik-Hochhauses und an den Hörsälen ausgehängt. Die Nachklausur findet am 04.10.2013 von 15 bis 18 Uhr im Hörsaal am Fasanengarten statt.

Aufgabe 1: Trägheitstensoren — 12 Punkte

Der Trägheitstensor eines starren Körpers ist definiert durch

$$I_{ij} = \int \rho(x_1, x_2, x_3)(\vec{x}^2\delta_{ij} - x_i x_j)\mathrm{d}V \,,$$

wobei $\rho(x_1, x_2, x_3)$ der Dichteverteilung des Körpers entspricht.

a) Berechnen sie den Trägheitstensor für Rotationen um den Schwerpunkt für

(i) einen homogenen Quader mit den Seitenlängen a, b, c

(ii) einen homogenen Zylinder mit Höhe h und Radius r

(iii) eine homogene Kugel mit Radius r

(iv) einen dünnen Reifen mit Radius r

b) Zeigen sie, dass der Trägheitstensor in einem aus dem Schwerpunkt um den Vektor $\vec{a}$ verschobenen Koordinatensystem durch

$$I_{ij} = I^S_{ij} + M(\vec{a}^2\delta_{ij} - a_i a_j)$$

gegeben ist. Hierbei ist I^S_{ij} der Trägheitstensor im Schwerpunktssytem und M die Gesamtmasse.

c) Zeigen sie, dass sich der Trägheitstensor unter Drehungen des körperfesten Koordinatensystems wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert, d.h.

$$\hat{I}_{ij} = A_{im}A_{jn}I_{mn} \,.$$

A ist die orthogonale Drehmatrix, deren Elemente $A_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{\hat{e}}_j$ aus den Skalarprodukten der Basisvektoren der Koordinatensysteme gebildet werden. Bei Drehung des Koordinatensystems transformieren sich die Koordinaten eines Vektors wie $\hat{x}_i = A_{ij}x_j$.

Aufgabe 2: kräftefreie Kreisel 8 Punkte

Die Rotation eines starren Körpers wird am einfachsten durch die Euler-Gleichungen

$$
\begin{aligned}
I_1\dot{\Omega}_1 - (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 &= N_1\,,\\
I_2\dot{\Omega}_2 - (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1 &= N_2\,,\\
I_3\dot{\Omega}_3 - (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 &= N_3
\end{aligned}
$$

beschrieben. Hierbei sind I_i die Trägheitsmomente, Ω_i die Projektion der Winkelgeschwindigkeit auf das körperfeste Koordinatensystem und N_i die angreifenden Drehmomente. Das körperfeste Koordinatensystem wurde so gewählt, dass es mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfällt. Betrachten sie im folgenden den Spezialfall des symmetrischen Kreisels, d.h. mit $I_1 = I_2$, ohne äussere Drehmomente, $N_i = 0$.

a) Lösen sie die Euler-Gleichungen für diesen Spezialfall.

b) Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ hängt mit den Euler-Winkeln φ, ϑ, ψ über

$$
\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\psi\,\dot{\varphi} + \cos\psi\,\dot{\vartheta} \\ \sin\vartheta\cos\psi\,\dot{\varphi} - \sin\psi\,\dot{\vartheta} \\ \cos\vartheta\,\dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{1}
$$

zusammen. Bestimmen sie unter Verwendung des Ansatzes $\vartheta(t) = \vartheta_0 = \text{const}$ und mit Hilfe obigen Zusammenhangs die zeitliche Änderung der Euler-Winkel.

c) Diskutieren sie die Ergebnisse.