Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 1

Besprechung: Di, 22.04.14

Aufgabe 1: Vektoranalysis

(a) Verifizieren Sie folgende Formel, wobei $f(\vec{x})$ eine skalare Funktion sei und $\vec{a}$ einen konstanten Vektor bezeichnet: $\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \operatorname{grad} f) = \vec{a}\Delta f - \operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \operatorname{grad} f)$.

(b) Berechnen Sie grad, div und rot von
  (i) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^3 - z$,
  (ii) $\vec{A}(\vec{r}) = (2y - z, x^2, x^3 - y)^T$.

(c) Berechnen Sie die Rotation des Feldes $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{r^2}$ $\qquad (\vec{\omega} = \text{const.})$.

Aufgabe 2: Ellipsen

Eine Ellipse mit dem Ursprung der x-y-Ebene als Mittelpunkt und den Halbachsen a und $b \leq a$ ist durch die *Mittelpunktsform* bestimmt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

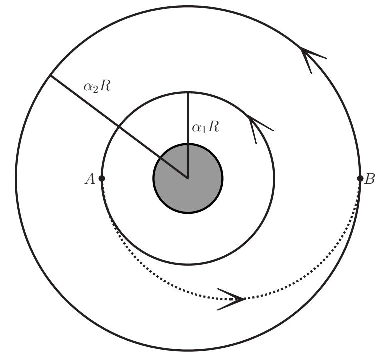
(a) Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte (x, y), für die die Summe der Entfernungen L_1 und L_2 zu zwei gegebenen Brennpunkten $F_1(-e, 0)$ und $F_2(e, 0)$ konstant $(= 2a)$ ist. Zeigen Sie, dass damit für (x, y) die Mittelpunktsgleichung gelten muss. Wie groß ist die kleine Halbachse b?

(b) In einem verschobenen Koordinatensystem lässt sich die Ellipse in Polarkoordinaten durch die Gleichung

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos\varphi}$$

beschreiben. Zeigen Sie, dass daraus die Mittelpunktsgleichung folgt ($\epsilon \neq 0$). Wie lautet der Zusammenhang der Parameter a und b mit den Parametern k und ϵ? Wo liegt der Mittelpunkt der Ellipse?

Aufgabe 3: Hohmann-Transfer



Um Satelliten auf eine geostationäre Bahn zu bringen, werden sie zunächst von der Trägerrakete in eine niedrige, kreisförmige, Erdumlaufbahn (Radius $\alpha_1 R$ mit Erdradius R) eingeschossen. Der Transfer in den höhergelegenen geostationären Orbit (Radius $\alpha_2 R$) kann dann über einen sog. *Hohmann*-Transfer [1] erfolgen. Dieser ist die energetisch günstigste Möglichkeit, bedingt aber eine recht große Transferzeit.
Dazu erfolgt eine erste Bahnkorrektur im Punkt A, typischerweise durch eine Oberstufe der Trägerrakete. Die Bahn wird aufgeweitet auf die gestrichelt gezeichnete Verbindungsbahn, die der halbe Bogen einer Kepler-Ellipse ist, deren einer Brennpunkt im Zentrum der Erde und der Kreisbahnen liegt und deren große Halbachse halb so groß ist wie die Entfernung zwischen A und B.
Im Punkt B erfolgt durch den Apogäumsmotor des Satelliten eine weitere Bahnkorrektur, die die Satellitenbahn zur geostationären Kreisbahn mit Radius $\alpha_2 R$ aufweitet.

(a) Berechnen Sie zunächst die zu den beiden Kreisbahnen gehörenden Geschwindigkeiten v_1 und v_2.

(b) Wie groß muss die Geschwindigkeitsänderung (Richtung und Betrag) im Punkt A sein, damit der Satellit auf die *Hohmann*-Ellipse kommt? Wie groß muss sie im Punkt B sein, damit er von der Ellipsenbahn auf die Kreisbahn R_2 gelangt? Schreiben Sie die Ergebnisse als Vielfache der Fluchtgeschwindigkeit $\sqrt{2gR}$.

(c) Wie lang ist die Flugdauer von A nach B?

Nützliche Formeln für Kepler-Ellipsen:

- Exzentrizität $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$ mit E Energie des Satelliten, μ reduzierte Masse m_S des Satelliten (hier $\mu \simeq m_S$), α Koeffizient des Potentials und Drehimpuls $L \equiv |\vec{L}| = |\vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})|$,
- Abstand Brennpunkt-Mittelpunkt $e = a\epsilon$,
- $a = \frac{\alpha}{2|E|}$,
- Umlaufdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}a^3}$.

[1] Walter Hohmann, *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper*, Oldenbourg, München 1925