Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 2

Abgabe: Fr, 25.04.14 *(freiwillig)*
Besprechung: Di, 29.04.14

Aufgabe 4: Gradient in Polarkoordinaten (*7+7=14 Bonuspunkte*)

(a) Berechnen Sie für den Ortsvektor $\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i$ in kartesischen Koordinaten die drei Vektoren

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$$

mit den Kugelkoordinaten (auch Polarkoordinaten genannt) r, ϑ, φ. Geben Sie die drei zugehörigen Einheitsvektoren an, und nennen Sie sie $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi$. Wie ist der Zusammenhang dieser Einheitsvektoren mit den kartesischen? Zeigen Sie Ihre Orthogonalität.

(b) Um die Komponenten des Differentialoperators grad in Polarkoordinaten zu erhalten kann man den folgenden Ansatz verwenden:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \Phi &= \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(x_1, x_2, x_3) + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(x_1, x_2, x_3) + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \Phi(x_1, x_2, x_3) \\ &= \vec{e}_r f_r(r, \vartheta, \varphi) + \vec{e}_\vartheta f_\vartheta(r, \vartheta, \varphi) + \vec{e}_\varphi f_\varphi(r, \vartheta, \varphi) \ , \end{aligned}$$

wobei f_α, $\alpha = \{r, \vartheta, \varphi\}$ zu bestimmende Koeffizienten sind. Berechnen Sie dazu zunächst die Skalarprodukte $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_j$ mit $j = 1, 2, 3$. Schreiben Sie die Komponenten $f_r = \vec{e}_r \cdot \operatorname{grad} \Phi$, $f_\vartheta = \vec{e}_\vartheta \cdot \operatorname{grad} \Phi$, $f_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot \operatorname{grad} \Phi$ unter Verwendung von Teil (a) und der Kettenregel auf.
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie grad Φ für $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$ explizit auf beide Arten berechnen.

Aufgabe 5: Eigenwerte und Eigenvektoren (*3+3=6 Bonuspunkte*)

Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 10 \\ 8 & 10 & -5 \end{pmatrix} .$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte dieser Matrix, indem Sie die Lösungen λ des sogenannten charakteristischen Polynoms $\det(M - \lambda \mathbb{1}) = 0$ bestimmen. Dabei bezeichnet $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix.
Hinweis: Eine der Lösungen ist $\lambda = 9$.

(b) Bestimmen Sie den normierten Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert $\lambda = 9$. Eigenvektoren sind diejenigen Vektoren, welche die Gleichung $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ erfüllen.