

✓

Blatt 24) a) Kugelkoordinaten r, ϑ, φ

bekannte Relation zu kartesischen Koord.

$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$x_3 = r \cos \vartheta$$

mit $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= \frac{\partial x_1}{\partial r} \vec{e}_{x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial r} \vec{e}_{x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial r} \vec{e}_{x_3} \\ &= \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_{x_1} + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_{x_2} + \cos \vartheta \vec{e}_{x_3} \end{aligned}$$

$$\text{analog } \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = r \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}_{x_1} + r \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_{x_2} - r \sin \vartheta \vec{e}_{x_3}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_{x_1} + r \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_{x_2} \quad \uparrow$$

(keine $\vec{e}_{x_3}$ -Abhängigkeit)

Einheitsvektoren dazu:

$$\text{benötige zunächst } \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| : \left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{f. } i=j \\ 0 & \text{f. } i \neq j \end{cases} \right)$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|^2 = \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cos^2 \vartheta = 1$$

$$\text{entspr. } \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right|^2 = r^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta = r^2$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|^2 = r^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi = r^2 \sin^2 \vartheta$$

$$\text{also } \vec{e}_r = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_{x_1} + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_{x_2} + \cos \vartheta \vec{e}_{x_3}$$

$$\vec{e}_\vartheta = \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}_{x_1} + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_{x_2} - \sin \vartheta \vec{e}_{x_3}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_{x_1} + \cos \varphi \vec{e}_{x_2}$$

(obdA $r \neq 0$)

2/ Zusammenhang mit kartesischen Einheitsvektoren:

$$\vec{e}_\alpha = \sum_{i=1}^3 R_{\alpha i} \vec{e}_i \quad ; \quad \alpha = \{r, \vartheta, \varphi\}$$

mit Matrix $R = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$

$$RR^T = R^T R = 1 \rightarrow \text{Drehmatrix}$$

Orthogonalität:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\vartheta &= \sin \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \varphi + \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \varphi - \sin \vartheta \cos \vartheta \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = -\sin \vartheta \cos \varphi \sin \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\vec{e}_\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi = -\cos \vartheta \cos \varphi \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \varphi \sin \varphi = 0$$

$\Rightarrow$ orthonormal

$$\begin{aligned} \text{Orientierung: } \vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta &= \begin{pmatrix} -\sin^2 \vartheta \sin \varphi - \cos^2 \vartheta \sin \varphi \\ \cos^2 \vartheta \cos \varphi + \sin^2 \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= +\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ rechtsorientiert für diese Reihenfolge

$$(\text{Spatprodukt } (\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta) \cdot \vec{e}_\varphi = +1)$$

]

3/

b) Schreibe grad Φ auf 2 verschiedene Arten:

$$\text{grad } \Phi = \left(\vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \Phi(x_1, x_2, x_3)$$

kart. Koordinaten, Def. von grad

$$\text{grad } \Phi = \vec{e}_r f_r(r, \vartheta, \varphi) + \vec{e}_\vartheta f_\vartheta(r, \vartheta, \varphi) + \vec{e}_\varphi f_\varphi(r, \vartheta, \varphi)$$

Polarkoord., Ansatz um Koeff. f zu bestimmenBestimme zunächst $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$:

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial r} x_i(r, \vartheta, \varphi) \right) \vec{e}_i$$

$$\text{also } \vec{e}_r \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial r} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \frac{\partial x_j(r, \vartheta, \varphi)}{\partial r}$$

$$\text{analog } \vec{e}_\vartheta \cdot \vec{e}_j = \frac{1}{r} \frac{\partial x_j(r, \vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta}$$

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_j = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial x_j(r, \vartheta, \varphi)}{\partial \varphi}$$

Betrachte jetzt $f_r = \vec{e}_r \cdot \text{grad } \Phi$:

$$f_r = \vec{e}_r \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Phi \right) \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j(r, \vartheta, \varphi)}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \Big|_{(r, \vartheta, \varphi)}$$

$$\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{\partial}{\partial r} \hat{\Phi}(r, \vartheta, \varphi)$$

$$\text{mit } \hat{\Phi}(r, \vartheta, \varphi) = \Phi(x(r, \vartheta, \varphi), y(r, \vartheta, \varphi), z(r, \vartheta, \varphi))$$

$$\text{analog } f_\vartheta = \vec{e}_\vartheta \cdot \text{grad } \Phi = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \hat{\Phi}(r, \vartheta, \varphi)$$

$$f_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot \text{grad } \Phi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\Phi}(r, \vartheta, \varphi)$$

4/ Damit:

$$\text{grad } \Phi = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \hat{\Phi}(r, \vartheta, \varphi)$$

$$\text{mit } \hat{\Phi}(r, \vartheta, \varphi) = \Phi(x(r, \vartheta, \varphi), y(r, \vartheta, \varphi), z(r, \vartheta, \varphi))$$

$$\text{in Basis der } \vec{e}_\alpha: \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\text{Beispiel: } \Phi = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

Kart. Koord.:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{2 \cdot x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}^3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}^3}$$

$$\text{grad } \Phi = \frac{-1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}^3} \cdot \sum_i x_i \vec{e}_i$$

Trage in
Polarkoord.:

$$\vec{e}_i = \sum_\alpha (R_{\alpha i})^T \vec{e}_\alpha$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{r^3} \left(r \sin \vartheta \cos \varphi \cdot (\sin \vartheta \cos \varphi \vec{e}_r + \cos \vartheta \cos \varphi \vec{e}_\vartheta - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) \right. \\ &\quad \left. + r \sin \vartheta \sin \varphi \cdot (\sin \vartheta \sin \varphi \vec{e}_r + \cos \vartheta \sin \varphi \vec{e}_\vartheta + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) \right. \\ &\quad \left. + r \cos \vartheta \cdot (\cos \vartheta \vec{e}_r - \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{r^3} (r \cdot \vec{e}_r) = -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\text{Polarkoord: } \hat{\Phi} = \frac{1}{r}$$

$$\text{grad } \Phi = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

5)

$$M = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 10 \\ 8 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Eigenwertgleichung:

$$\det(M - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -11-\lambda & 2 & 8 \\ 2 & -2-\lambda & 10 \\ 8 & 10 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-11-\lambda)(-2-\lambda)(-5-\lambda) + 2 \cdot 10 \cdot 8 + 8 \cdot 2 \cdot 10 \\ - 8 \cdot 8 \cdot (-2-\lambda) - 10 \cdot 10 \cdot (-11-\lambda) - 2 \cdot 2 \cdot (-5-\lambda)$$

$$= -110 + 180 + 160 + 128 + 1100 + 20 \\ + \lambda(-22 - 55 - 10 + 64 + 100 + 4) \\ + \lambda^2(-11 - 2 - 5) \\ + \lambda^3(-1) = 0$$

$$\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda - 1458 = 0$$

$$\underline{\lambda_1 = 9} \Rightarrow (\lambda - 9)(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \\ \lambda^3 + (a-9)\lambda^2 + (b-9a)\lambda - 9b = 0 \\ \Rightarrow a = 27, \quad b = 162$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 27\lambda + 162 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-27 \pm \sqrt{729 - 4 \cdot 162}}{2} = \frac{-27 \pm 9}{2}$$

$$\underline{\lambda_2 = -9}$$

$$\underline{\lambda_3 = -18}$$

2/ b) Eigenvektore

Bedingung: $M \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 10 \\ 8 & 10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem:

$$\text{I)} \quad -20v_1 + 2v_2 + 8v_3 = 0$$

$$\text{II)} \quad 2v_1 - 11v_2 + 10v_3 = 0$$

$$\text{III)} \quad 8v_1 + 10v_2 - 14v_3 = 0$$

Addiere $\alpha \cdot \text{II)}$ zu I) und III) sodass v_1 aus diesen verschwindet:

$$\text{I')} = \text{I)} + 10 \cdot \text{II)}$$

$$-108v_2 + 108v_3 = 0$$

$$\text{III')} = \text{III)} - 4 \cdot \text{II)}$$

$$54v_2 - 54v_3 = 0$$

(Wenn $\vec{v}$ Eigenvektor, dann ist auch $\beta \cdot \vec{v}$ Eigenvektor, $\beta \in \mathbb{C}$)

$\Rightarrow$ globaler Faktor muss aus Gleichungssystem unbestimmt bleiben

$\Rightarrow \text{I')} \text{ und III')} \text{ äquivalent}$

$$\text{Normierungsbed.} \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$$

$$\Rightarrow v_2 = v_3 \quad \text{in II)} \quad 2v_1 - v_2 = 0$$

$$v_2 = 2v_1$$

in Normierung

$$v_1^2 + 4v_1^2 + 4v_1^2 = 9v_1^2 = 1$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{1}{3}$$

(komplexe Phase immer noch unbestimmt b.z.v. im Reellen Vorzeichen)

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$