

6) a) Vorgehen analog zu Aufgabe 6:

$$\lambda_2: M \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$$

$$\text{I)} -2v_1 + 2v_2 + 8v_3 = 0$$

$$\text{II)} 2v_1 + 7v_2 + 10v_3 = 0$$

$$\text{III)} 8v_1 + 10v_2 + 4v_3 = 0$$

$$\text{I} + \text{II)} 9v_2 + 18v_3 = 0$$

$$v_2 = -2v_3$$

$$\text{in I)} -2v_1 - 4v_3 + 8v_3 = 0$$

$$2v_3 = v_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \quad \leftarrow \text{Normierungsfaktor}$$

$$\lambda_3: \text{I)} 7v_1 + 2v_2 + 8v_3 = 0$$

$$\text{II)} 2v_1 + 16v_2 + 10v_3 = 0$$

$$\text{III)} 8v_1 + 10v_2 + 13v_3 = 0$$

$$4 \cdot \text{II} - \text{III)} 54v_2 + 27v_3 = 0$$

$$v_3 = -2v_2$$

$$\text{in II)} 2v_1 + 16v_2 - 20v_2 = 2v_1 - 4v_2 = 0$$

$$v_1 = 2v_2$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\text{oder Orthogonalität: I) } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 + 2v_2 + 2v_3 = 0$$

$$\text{II) } \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 2v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$$

$$\text{I} + \text{II)} 3v_1 + 3v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = -v_3$$

$$\text{in I)} 2v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{v_3}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \Rightarrow U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Kontrolle: $\det U = 1$ (*)

$$\begin{aligned} U^T U &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow U^T = U^{-1} \Rightarrow \text{orthogonal}$

$$\begin{aligned} U^T M U &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 9 \\ 2 & -2 & 10 \\ 8 & 10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -18 & -36 \\ 18 & 18 & -18 \\ 18 & -9 & 36 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = M_D \end{aligned}$$

$\Rightarrow M_D$ hat die zugehörigen Eigenwerte auf der Diagonalen.

$$(*) \det U = \frac{1}{27} \cdot (4 + 4 + 4 + 8 + 1 + 8) = 1$$

Lagrange gl. 1. Art

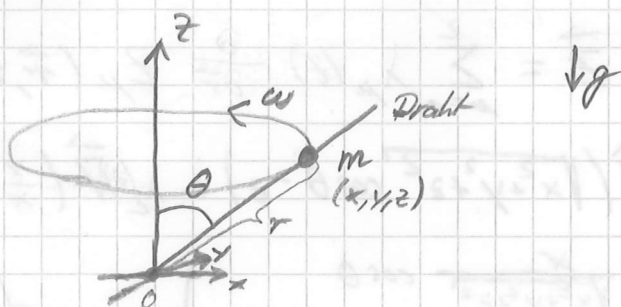
- Zwangsbedingungen, Zwangskräfte

* lassen sich über Formalismus in Bew. gl. einbauen

* später eigentlich nicht mehr sonderlich relevant

→ durch geschickte Wahl verallg. Koordinaten
automatisch eliminiert

7) Skizze



a) Zwangsbedingungen:

 Z_1 : Perle auf Draht fixiert

$$r \cdot \cos \theta = z$$

$$\Rightarrow Z_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos \theta - z = 0$$

 Z_2 : Bew. mit konst. Winkelgeschw. $\omega = \dot{\varphi} = \text{const.}$ lässt sich nicht als $Z_2(x, y, z, t) = 0$ schreiben

⇒ nicht holonom

aber nach Integration:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \text{ o.B.d.A. } \varphi_0 = 0 \text{ (Startpunkt egal)}$$

$$\text{"arctan } \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow Z_2 = \frac{y}{x} - \tan(\omega t) = 0, \text{ jetzt holonom}$$

$\checkmark$ Typ: * skleronom: $\frac{\partial z_\mu}{\partial t} = 0 \rightarrow z_1$
 * rheonom: $\frac{\partial z_\mu}{\partial t} \neq 0 \rightarrow z_2$

Anzahl Freiheitsgrade: $f = 3 \cdot N - N_e = 3 \cdot 1 - 2 = 1$

b) z.B. r Abstand Perle - Ursprung
 (natürlich auch andere Wahl möglich,
 z.B. r' Abstand Perle - z-Achse)

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \quad x &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos(\omega t) \\
 y &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin(\omega t) \\
 z &= r \cdot \cos \theta
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos(\omega t) \\ y &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin(\omega t) \\ z &= r \cdot \cos \theta \end{aligned}} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Zwangskraft $\vec{Z} = \sum_{\mu=1}^2 \lambda_\mu(t) \frac{\partial}{\partial \vec{r}} z_\mu(\vec{r}, t)$ (Skript 2.8)

hier: $\vec{Z} = \lambda_1 \vec{\nabla} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos \theta - z) + \lambda_2 \vec{\nabla} \left(\frac{y}{x} - \tan(\omega t) \right)$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos \theta \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos \theta \\ \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos \theta - 1 \end{pmatrix} + \lambda_2(t) \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} \\ \frac{1}{x} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \lambda_1 \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \theta \cos(\omega t) \\ \sin \theta \cos \theta \sin(\omega t) \\ \cos^2 \theta - 1 \end{pmatrix} + \lambda_2(t) \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\omega t)}{r \cos^2(\omega t) \sin \theta} \\ \frac{1}{r \cos(\omega t) \sin \theta} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Immer noch sehr komplizierter Ausdruck,
 selbst in angepassten Variablen

3/

c) Lagrange - Gl. 1. Art (Skript 2.18, 2.19)

$$(*) \quad m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \theta \cos(\omega t) \\ \sin \theta \cos \theta \sin(\omega t) \\ \cos^2 \theta - 1 \end{pmatrix} + \lambda_2(t) \begin{pmatrix} \frac{\sin(\omega t)}{r \cos^2(\omega t) \sin \theta} \\ \frac{1}{r \cos(\omega t) \sin \theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z_1: & r \cos \theta - z = r \cos \theta - r \cos \theta = 0 \\ z_2: & \frac{y}{x} - \tan(\omega t) = \frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)} - \tan(\omega t) = 0 \end{cases}$$

→ automatisch erfüllt durch Wahl von r

D.h. r ist passende verallgemeinerte Koordinate, die Zwangsbed. implizit berücksichtigt.

(*) linke Seite noch umgeschrieben:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \sin \theta (\ddot{r} \cos(\omega t) - 2\dot{r}\omega \sin(\omega t) - r\omega^2 \cos(\omega t)) \\ \sin \theta (\ddot{r} \sin(\omega t) + 2\dot{r}\omega \cos(\omega t) - r\omega^2 \sin(\omega t)) \\ \cos \theta \cdot \ddot{r} \end{pmatrix}$$

3 Unbekannte: $r, \lambda_1, \lambda_2(t)$

d) Lagrange - Gl. vereinfacht sich ($\theta = \frac{\pi}{2}$: $\cos \theta = 0, \sin \theta = 1$)

$$(*) \quad m \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos(\omega t) - 2\dot{r}\omega \sin(\omega t) - r\omega^2 \cos(\omega t) \\ \ddot{r} \sin(\omega t) + 2\dot{r}\omega \cos(\omega t) - r\omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2(t) \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\omega t)}{r \cos(\omega t)} \\ \frac{1}{r \cos(\omega t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z\text{-Komp.:} \quad 0 &= -mg - \lambda_1 \\ \lambda_1 &= -mg \end{aligned}$$

4/

y-Komp:

$$m(\ddot{r} \sin(\omega t) + 2\dot{r}\omega \cos(\omega t) - r\omega^2 \sin(\omega t)) \\ = \lambda_2(t) \frac{1}{r \cos(\omega t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_2(t)}{m} = r \ddot{r} \sin(\omega t) \cos(\omega t) + 2r\dot{r}\omega \cos^2(\omega t) - r^2\omega^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

x-Komp:

$$\frac{\lambda_2(t)}{m} = -r\ddot{r} \frac{\cos^3(\omega t)}{\sin(\omega t)} + 2r\dot{r}\omega \cos^2(\omega t) + r^2\omega^2 \frac{\cos^3(\omega t)}{\sin(\omega t)}$$

gleichsetzen: ($\dot{r}$ -Term fällt heraus)

$$\frac{r\ddot{r}}{\sin(\omega t)} (\sin^2(\omega t) \cos(\omega t) + \cos^3(\omega t)) = \frac{r^2\omega^2}{\sin(\omega t)} (\sin^2(\omega t) \cos(\omega t) + \cos^3(\omega t))$$

muss für alle t gelten $\Rightarrow$ wähle t mit $\sin(\omega t) \neq 0$ $\cos(\omega t) \neq 0 \Rightarrow$ kürzen

$$r\ddot{r} \cos(\omega t) = r^2\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

$$\text{Ansatz: } r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

$$\ddot{r} = A\omega^2 e^{\omega t} + B\omega^2 e^{-\omega t} \Rightarrow \text{Lsg.}$$

Benötige 2 Anfangsbed.; z.B. $r(t=0)$, $\dot{r}(t=0)$ Bestimmung von $\lambda_2(t)$: in y-Komp. ($\dot{r} = A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t}$)

$$\lambda_2(t) = m\omega^2 \cos(\omega t) \cdot \left((Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t})^2 \sin(\omega t) \right. \\ \left. + 2(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t})(Ae^{\omega t} - Be^{-\omega t}) \cos(\omega t) \right. \\ \left. - (Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t})^2 \sin(\omega t) \right) \\ = 2m\omega^2 \cos^2(\omega t) (A^2 e^{2\omega t} - B^2 e^{-2\omega t})$$

5

(Borrenermaterial, nicht gefragt)

Bsp:

$$r(t=0) = R$$

$$\dot{r}(t=0) = 0$$

$$\Rightarrow A + B = R$$

$$\omega(A - B) = 0 \Rightarrow A = B = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{R}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t})$$

Für große t dominiert erster Term

$\Rightarrow$ Perle wird mit exp. ansteigenden Abstand nach außen geschleudert

allg:

$$r(t=0) = R$$

$$\dot{r}(t=0) = v_0$$

$$\Rightarrow A + B = R$$

$$\omega(A - B) = v_0$$

$$\Rightarrow A = B + \frac{v_0}{\omega}$$

$$\Rightarrow 2B = R - \frac{v_0}{\omega}$$

$$B = \frac{1}{2} \left(R - \frac{v_0}{\omega} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(R + \frac{v_0}{\omega} \right)$$

$$r = \frac{1}{2} \left(\left(R + \frac{v_0}{\omega} \right) e^{\omega t} + \left(R - \frac{v_0}{\omega} \right) e^{-\omega t} \right)$$

Bsp. 2: für $v_0 = -\omega R$: exp. ansteigender Term hebt sich gerade weg

$$r = R \cdot e^{-\omega t}$$

Perle bewegt sich asymptotisch gegen Ursprung.

L

J