5/

8a) Lagrange-Fkt:

$$L(r,\dot r) = T - U$$

pot. Energie $U = mgz = mgr\cos\theta$

kin. Energie:

$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^{\,2} = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$$

$$= \frac{m}{2}\Big((\dot r\cos(\omega t) - r\omega\sin(\omega t))^2 \sin^2\theta + (\dot r\sin(\omega t) + r\omega\cos(\omega t))^2 \sin^2\theta + \dot r^2\cos^2\theta \Big)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot r^2\sin^2\theta + r^2\omega^2\sin^2\theta + \dot r^2\cos^2\theta \right)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\omega^2\sin^2\theta \right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\omega^2\sin^2\theta) - mgr\cos\theta$$

b) Euler-Lagrange-Gl.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r$$

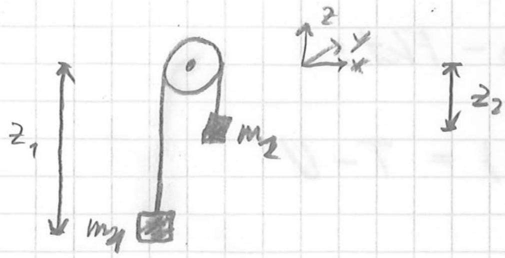
$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\omega^2\sin^2\theta - mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot r - mr\omega^2\sin^2\theta + mg\cos\theta = 0$$

$$\ddot r - r\omega^2\sin^2\theta + g\cos\theta = 0$$

für $\sin\theta = 1, \cos\theta = 0$: $\quad \ddot r - r\omega^2 = 0$ wie vorher

7/9) Skizze:



a) 5 holonom-skleronome Zwangsbedingungen:

$$x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$$

$$z_1 + z_2 = \ell$$ Länge der Schnur

Also $2 \cdot 3 - 5 = 1$ Freiheitsgrad

Passende generalisierte Koordinate z.B. $q = z_1$
$(z_2 = \ell - q)$

b) Lagrange-Fkt.

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{z}_2^2 = \frac{m_1}{2}\dot{q}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{q}^2$$
$$= \frac{m_1+m_2}{2}\dot{q}^2$$

$$U = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = m_1 g q + m_2 g(\ell - q)$$

$$= g(m_1 - m_2)q + m_2 g \ell$$

$$L(q,\dot{q}) = T - U = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{q}^2 - g(m_1-m_2)q - m_2 g \ell$$

Bew.gl. $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1+m_2)\dot{q}$; $\frac{\partial L}{\partial q} = -g(m_1 - m_2)$

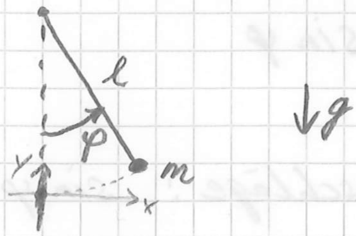
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = (m_1+m_2)\ddot{q} + g(m_1-m_2) = 0$$

$$\ddot{q} = -\frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2} g$$

verzögerter freier Fall (freier Fall: $\ddot{q} = -g$)

10) Das mathematische Pendel

Skizze:



Polarkoord.: $x = l \sin\varphi$

$y = l(1-\cos\varphi)$

a) verallg. Koordinate: φ

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\left[(l\cos\varphi\,\dot{\varphi})^2 + (l\sin\varphi\,\dot{\varphi})^2\right]$$

$$= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$U = m \cdot g \cdot y = m \cdot g \cdot l \cdot (1-\cos\varphi)$$

$$L = T - U = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - m \cdot g \cdot l\,(1-\cos\varphi)$$

b) Bew. gl.:

Benutze Lagrangegl. 2. Art:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

hier: $q = \varphi$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m}{2} l^2\, 2\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m \cdot g \cdot l \cdot (-\sin\varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m l^2 \ddot\varphi + m g l \sin\varphi = 0$$

$$\ddot\varphi = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

c) kleine Pendelausschläge: $\sin\varphi \approx \varphi$

$\rightarrow$ harm. Oszillator

$$\ddot\varphi = -\frac{g}{l}\varphi$$

Ansatz: $\varphi(t) = A\cdot\sin(\omega t + \vartheta)$ (oder: $\varphi(t) = A\cdot\sin(\omega t) + B\cdot\cos(\omega t)$)

$$\dot\varphi(t) = A\omega\cos(\omega t + \vartheta)$$
$$\ddot\varphi(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \vartheta)$$

eingesetzt: $-A\omega^2\sin(\omega t + \vartheta) = -\frac{g}{l}A\sin(\omega t + \vartheta)$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{g/l}$$

A, ϑ aus Anfangsbed.: $\varphi(t=0) = \varphi_0$: $A\sin\vartheta = \varphi_0$

$\dot\varphi(t=0) = \dot\varphi_0$: $A\omega\cos\vartheta = \dot\varphi_0$

$$\Rightarrow \tan\vartheta = \omega\frac{\varphi_0}{\dot\varphi_0}$$

$$\vartheta = \arctan\left(\omega\frac{\varphi_0}{\dot\varphi_0}\right)$$

$$\Rightarrow A = \varphi_0\left(\sin\left(\arctan\left(\omega\frac{\varphi_0}{\dot\varphi_0}\right)\right)\right)^{-1}$$

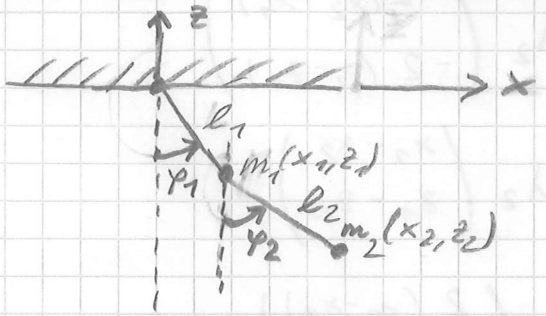
auch hier Kleinwinkelnäherung (als Lösung beides ok, eines davon reicht)

$\arctan x \approx x$: $\vartheta \approx \omega\frac{\varphi_0}{\dot\varphi_0}$

$$A \approx \varphi_0\frac{1}{\frac{\omega\varphi_0}{\dot\varphi_0}} = \frac{\dot\varphi_0}{\omega}$$

1/

11) Ebenes mathematisches Doppelpendel



a) Zwangsbedingungen:

A_1: feste Länge Pendel 1: $x_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0$

A_2: — " — 2: $(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_2^2 = 0$

(Aufhängepunkt fest; keine Translation längs x-Richtung betrachtet
$y = y_1 = y_2 \equiv 0$ ebenes Pendel)

$\Rightarrow N_Z = 2 \quad \Rightarrow f = \underset{\#\text{Massen}}{2} \cdot \underset{\#\text{Dimensionen}}{2} - 2 = 2$

Zwangsbed. holonom ($A_\mu = 0$)
und skleronom ($\frac{\partial A_\mu}{\partial t} = 0$)

b) $\vec{F}_i(\vec{r}) = - m_i g \cdot \vec{e}_z$

Zwangskräfte $\vec{Z}_i = \sum_\mu \lambda_\mu \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_\mu(\vec{r})$

mit $\vec{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ z_i \end{pmatrix}$ (t-Unabh. von A_μ bereits verwendet)

2/ Einsetzen:

$$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2z_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2(x_2-x_1) \\ -2(z_2-z_1) \end{pmatrix}$$

$$= 2\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ z_1-z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2(x_2-x_1) \\ 2(z_2-z_1) \end{pmatrix}$$

$$= 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ z_2-z_1 \end{pmatrix}$$

c) $$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 + \vec{Z}_1 = -m_1 g \vec{e}_z + 2\lambda_1 \vec{r}_1 + 2\lambda_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2\lambda_1}{m_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \frac{2\lambda_2}{m_1}\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ z_1-z_2 \end{pmatrix}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2 + \vec{Z}_2$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{z}_2 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2\lambda_2}{m_2}\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ z_2-z_1 \end{pmatrix}$$

gekoppelte inhomogene DGL 2. Ordnung
Lösung später mit Lagrangegl. 2. Art

d) aus VL: $$\frac{dE}{dt} = -\sum_\mu \lambda_\mu(t) \frac{\partial}{\partial t} A_\mu(\vec{r}, t)$$

sklerononome Z. $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

Energie: kin: $T_i = \frac{m_i}{2}(\dot{\vec{r}}_i)^2$

pot: $\vec{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U \Rightarrow U = \sum_i (m_i \cdot g \cdot z_i)$ (+const.)

Nullpunkt des Potentials beliebig wählbar, hier $=0$

3

$$\Rightarrow E = \sum_i T_i + U = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} + g(m_1 z_1 + m_2 z_2)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m_1}{2}\cdot 2\cdot \dot{\vec{r}}_1\cdot\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\,\dot{\vec{r}}_2\cdot\ddot{\vec{r}}_2 + g(m_1\dot{z}_1 + m_2\dot{z}_2)$$

$$= m_1\dot{x}_1\left(\frac{2\lambda_1}{m_1}x_1 + \frac{2\lambda_2}{m_1}(x_1-x_2)\right)$$
$$+ m_1\dot{z}_1\left(2\frac{\lambda_1}{m_1}z_1 + \frac{2\lambda_2}{m_1}(z_1-z_2) \cancel{-g}\right)$$

$$+ m_2\dot{x}_2\left(\frac{2\lambda_2}{m_2}(x_2-x_1)\right)$$
$$+ m_2\dot{z}_2\left(\frac{2\lambda_2}{m_2}(z_2-z_1)\cancel{-g}\right)$$

$$+ \cancel{g m_1 \dot{z}_1} + \cancel{g m_2 \dot{z}_2}$$

$$= 2\lambda_1(\dot{x}_1 x_1 + \dot{z}_1 z_1)$$
$$+ 2\lambda_2\Big(\dot{x}_1(x_1-x_2) + \dot{x}_2(x_2-x_1) + \dot{z}_1(z_1-z_2) + \dot{z}_2(z_2-z_1)\Big)$$

Totale Zeitableitungen der Zwangsbed.:

$$0 = \frac{d}{dt}A_1 = 2x_1\dot{x}_1 + 2z_1\dot{z}_1$$

$$0 = \frac{d}{dt}A_2 = 2(x_2-x_1)(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + 2(z_2-z_1)(\dot{z}_2-\dot{z}_1)$$

entspricht gerade Ausdrücken in Klammern

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$$